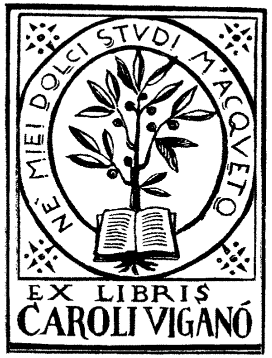


DELLE

PROGRESSIONI E SERIE

LIBRI DUE

DEL P. FRANCESCO LUINO

della Compagnia di Gesù

COLL' AGGIUNTA

DI DUE MEMORIE

DEL P. RUGGIERO GIUSEPPE BOSCOVICH

della medesima Compagnia.

IN MILANO MDCCLXVII.
Appresso Giuseppe Galeazzi Regio Stampatore.
Con licenza de' Superiori, e Privilegio.

A SUA ECCELLENZA

IL SIG.

CARLO CONTE DI FIRMIAN

SIGNORE DI CRONMETZ MEGGEL
E LEOPOLDSCRON
CAVALIERE DELL' INSIGNE ORDINE
DEL TOSON D'ORO
PLENIPOTENZIARIO NELLA LOMBARDIA AUSTRIACA
VICE-GOVERNATORE DI MANTOVA
SABIONETA E BOZZOLO
CONSIGLIERE INTIMO ATTUALE DI STATO
ec. ec. ec.

ECCELLENZA.

A Una tenue, e poco pregevole operetta, qual si è questa mia, sembra, che mal si convenga il venire innanzi a V. E., e richiederla di sua protezione. Ma, qual ch' egli siasi il Libro, esso è *pur Libro, che appartiene a scienza, e a quella singolarmente, la quale sopra le altre tutte per maniera sollevasi, che il gran VVolfio non temè di dire* Humanae eruditionis apicem conscendimus Analysim tradituri. *Ciò basta, non solo perchè io punto non dubiti, che V. E. non sia per accoglierlo favorevolmente, ma anche perchè io mi rechi a dovere il farlene offerta. Io non parlo qui, o Signore, nè dell' amore alle lettere, ed alle scienze, che in mezzo alle più ardue cure del Politico*

Governo le è indivisibil compagno, nè della deputazion luminosa, ch' Ella ha dall' Augustissima Nostra Sovrana riportato nella soprantendenza alla Regia Università di Pavia, e a tutte le Scuole della Lombardia Austriaca a V. E. incaricata. Sono, è vero, questi per me vivi stimoli a supplicarla di volere col patrocinio suo accordare a quest' opera mia quel pregio, che altronde non potrebbe sperare. Ma un altro motivo rammenterò io piuttosto, che a me in particolar modo appartiene, e non ſarà, ſpero, a V. E. diſcaro. A giovamento di quegli principalmente, che intraprendono lo ſtudio delle ſcienze Aſtronomiche, ho io indirizzata queſta mia operetta: Perciocchè riflettendo, che queſta sì nobile ſcienza non ſi ferma più di preſente nelle ſemplici ricerche de' fatti, e nella ſola oſſervazione, e combinazion de' fenomeni, ma s' innoltra a eſaminare le cagioni, e da queſte ne trae le tante, ed in apparenza sì irregolari variazioni, con un continuo uſo, non ſolo della più ſublime geome-

trìa, ma ancor del calcolo, e in queſto non delle ſemplici proporzioni, e progreſſioni, ma del più compoſto metodo delle interpolazioni, e di ogni ſpecie di ſerie le più complicate, io ho intrapreſo, e di acquiſtare per me, e di comunicare poſcia agli altri, quelle cognizioni, che più vantaggioſe a ciò foſſero, e più neceſſarie. Nel che fare, quanto a ragione poſſa io luſingarmi di avere fatta coſa a V. E. gradita, agevolmente conoſceràllo chiunque ſa, e la premura, e l' impegno, ch' Ella ha in promuo-

vere gli ſtudj di tale natura, ed il favore ſingolarmente da V. E. preſtato alla erezione di queſta noſtra Aſtronomica Specola. Queſto, o Signore, è ciò, che mi fa più d'ogn' altra coſa ardito di offerire a V. E. il preſente, qualunque ſia, frutto di mie fatiche; e pieno de' più ſinceri ſentimenti di riconoſcenza, e di ſommiſſione, col più profondo riſpetto mi proteſto

Di V. E.

Milano 23. Ottobre 1767.

Umiliſs., Divotiſs., Obbligatiſs. ſerv.
Franceſco Luino della Comp. di Gesù.

PREFAZIONE.

L'Opera, che vi preſento, o corteſe Lettore, non vi ſuppone nè matematico conſumato, nè affatto novizio nelle matematiche facoltà. Per amendue queſte claſſi di perſone ſi ſono, ancora a' dì miei, pubblicati acconci trattati in ogni genere, oſſia di calcolo, oſſia ſpettanti a geometría; quando vi ſiate già altronde provisto di una cotale miſura di notizie ſul calcolo finito di Carteſio, e ſull' infinito delle ſerie, credo, che dalla lettura della preſente operetta ne potrete trarre vantaggio, e per riordinarvi in capo le coſe quà e là lette ſparſamente ſu altri Autori, e per promuovere più oltre le cognizioni voſtre ſull' arte analitica, e per addeſtrarvi eziandio alla invenzione di nuovi metodi pel calcolo più ſublime. A queſti tre fini io almeno ho indirizzata l'Introduzione, ed i due Libri, ne' quali è diviſa queſta mia operetta; non ſo poi ſe ſarò ſtato baſtantemente fortunato per conſeguirgli.

Nella Introduzione vi piacerà forſe il vedere riſtrette in poche formole, univerſali, e chiare, tutte le note leggi del calcolo per ogni ſpecie di quantità algebraiche, ed i migliori metodi per trasformare, e per iſciogliere le equazioni di diverſo grado, che più frequentemente s' incontrano nella ſoluluzione de' problemi. Fin qui però non v'ha nulla di nuovo, nè che sia da pregiarsi più che tanto seppure di ciò degna a taluno non sembri la trattazione sulle quantità positive, e negative, e sulle regole de' segni; le trasformazioni ne' radicali, e la stessa, che ho data al metodo del Varignon per la soluzione delle equazioni di grado più elevato del terzo. A vero dire, io mi sono determinato a pubblicare questo *Trattato del Calcolo algebraico* per modo d'introduzione al restante, non tanto per non obbligarvi a rivedere su altri Autori gli artifizj analitici, de' quali mi servo continuamente nel decorso, quanto perchè mi sembravano quelle tre materie trattate con qualche, non a tutti comune, eleganza, e precisione.

Nel primo Libro, in cui si parla delle progressioni geometriche, ed aritmetiche, incominciarete, spero, o Lettore, a sentire la fecondità, e l'importanza dell' analisi, ed acquisterete più giuste idee del legamento, ed unità delle parti, che la compongono. Trattano alcuni Autori la teoría delle progressioni indipendentemente dall' Analisi Cartesiana, a cui anzi la fanno precedere; ma le loro dimostrazioni restano sempre per ciò snervate, e languide, nè si sostengono che su certi metafisici raziocinj, non tanto facili a concepirsi, ed assai nojosi; io all' incontro dell' Analisi Cartesiana mi servo per dimostrarla, e su d'essa l' appoggio principalmente. La teoría delle proporzioni, e quella de' lo-

logaritmi, tengono, dirò così, chiusa in mezzo la teoría delle progressioni, e stanno tutte e tre insieme unite per modo, che non si può degnamente trattare l'una senza l'altre. Nel Capo primo adunque di questo Libro, si parla delle proporzioni geometriche, ed aritmetiche, e col perpetuo uso di formole assai vibrate, e strette, seguitate poscia, ed illustrate da riflessioni addattate, e da opportune spiegazioni, mi lusingo di poter rendere famigliare, e dolce all' iniziato Algebrista l'analitico linguaggio, a cui troppo è necessario, che s' avvezzi la fantasia, se pretende innoltrarsi ne' calcoli più profondi. Nel Capo secondo vedrete, dedotta tutta la teoría delle progressioni geometriche, ed aritmetiche da due soli, e semplicissimi principj, con accompagnamento copioso di teoremi, e problemi, e di formole ben dimostrate, ed universali. Pel terzo Capo ardirei quasi di assicurarvi, che la teoría de' logaritmi vi è messa nella possibile, miglior sua luce, a non dover dispiacere anche a' più intendenti. Ho presa da Eulero la più genuina, e più naturale idea de' logaritmi, che noi usiamo ne' calcoli; ma quanto io dica di più d' Eulero sulla loro natura, e sulla maniera d' usargli, agevolmente conoscerallo chiunque si vorrà prendere la briga di confrontare ciò, ch' io espongo, e dimostro *ex professo*, con ciò, che ha detto Eulero, che tratta questo punto sol di passaggio. Il metodo di evitare i logaritmi negativi, tanto utile pe' calcoli trigonometrici, mi è costato assai

per

per ridurlo a quella simplicità, ed universalità, che non sarà forse facile ritrovare presso altri Autori.

Ma in questo primo Libro, siccome ancora nell' Introduzione, non vi sono che cose elementari, e l' unico loro pregio, seppure ne hanno alcuno, si è che *non vi sono trattate elementarmente*; quasi tutte all' incontro le cose, ch' entrano nel secondo Libro appartengono al calcolo sublime, dove hanno il maggior suo uso, ed ho procurato di maneggiarle, e di stenderle con quella precisione, e sciolrura di scrivere, che ad esse si conviene. Non v' ha teoría, che più naturalmente debba venir dopo quella delle progressioni, che la teoría delle serie, di cui quelle ne sono il primo ramo; eppure quanto pochi si senton portati a studiarla con applicazione? Ciò accade, parte per la difficoltà de' calcoli, pe' quali conviene pur passare per ben comprenderla, parte perchè non vedesi di primo colpo a quale fine, e con quale profitto per l' altre parti della matematica si possa essa indirizzare. Ho stimato perciò, che riuscirà cosa a tutti giovevole, se così tentassi di condurgli alla teoría delle serie, che insieme restassero da se appianati questi ostacoli. Primamente mi so a mostrare ne' primi due Capi del secondo Libro, quanto frequentemente uopo sia entrare ne' calcoli colle serie, e con quanta velocità si determinin con esse i valori delle incognite quantità, o delle quantità assai composte, che ad ogni passo è mestieri introdurre nella soluzione de' problemi, e delle

e delle equazioni algebraiche. Qui vedrete, o Lettore, trattata compiutamente l' evoluzione in serie delle potenze, e de' radicali, con metodi, altri presi da altri Autori, e da me ristretti in formole egualmente brevi, che universali; altri derivati da me col calcolo da que' primi, ed uno principalmente il più semplice, ed il meno avvertito, applicato distesamente a' numeri. Qui troverete innoltre sviluppati i metodi per l' evoluzione delle radici nelle equazioni composte, per l' evoluzione delle frazioni, finiti, ed infinitinomie ne' loro termini, per lo spezzamento delle frazioni volgari, e per il problema diretto, ed inverso delle frazioni continue. In tutte, ed in ciascuna di queste particolari trattazioni io penso d' avere e rischiarati, e messi in miglior ordine, e in varie guise aumentati, e distesi a più grande generalità diversi metodi fin qui conosciuti, ed usati ne' calcoli. Vorrei, che contaste trai primi un metodo della Signora Agnesi, per lo spezzamento delle frazioni, ridotto qui a' suoi veri principj, ed alla generalità, che troppo mancava all' esposizione dell' Agnesi. Il Capo terzo mette fine al mio lavoro: Si parla in esso della invenzione de' termini generali, e delle somme generali delle serie. Ognun sa quanto sia intralciata questa parte di matematica, e per la difficoltà dell' argomento, e per i moltiplici, e tutti da sublimi principj derivati metodi, de' quali l' hanno arricchita i più accreditati Scrittori. Io distinguo in tre classi le serie, cioè in serie

 arit-

aritmetiche, in serie geometriche, ed in serie composte dalle aritmetiche, e dalle geometriche; assegno gl' infiniti diversi ordini, ne' quali si suddivide ciascuna classe, e per ciascuna classe espongo il metodo più acconcio, e più facile per trovare il termine, e la somma generale cercata. Vero è, che non mi sono divertito a formare a bella posta nuove serie intralciate, comunque di nessun uso, unicamente per avere il piacere di sommarle, o di trovare il loro termine generale; ma oltrecchè altri l' hanno già fatto per me, a nessuno il divieto di farlo in avvenire; io ho stimato di dovere andar dietro piuttosto all' utilità, che alla pompa. Quanto al metodo, egli è unico, e semplicissimo per tutte le serie sommabili, ma non è mio. Il celebre P. Riccati lo ha trovato, e svolto in tutte le sue parti nell' egregio suo Commentario sulle serie, pubblicato fino dall' anno 1756., nè credo mi riprenderà di ardito, se vedrà, che dopo l' esposizione del suo Metodo, e dopo l' applicazione del medesimo alle dette tre classi di serie, io mi sono innoltrato a stendere alcune mie piccole osservazioni, indirizzate a renderlo più semplice, e spedito per la pratica: Tanto più ch' esse m' hanno servito a sciogliere per una strada, ch' io credo non ancora battuta da altri, il noto problema delle interpolazioni. Quante sono le serie, alle quali si stende il Metodo del P. Riccati, altrettante sono quelle, che s' interpolan col mio; anzi dato il termine generale di qualunque

altra serie, si trova il termine generale della medesima serie interpolata, e se la serie è sommabile si trova anche la somma generale della interpolata, trovata che sia la generale somma della data. Voleva a tutto questo aggiungere una copiosa applicazione di questo Metodo all' Astronomía, ed esporre gli usi del medesimo per la quadratura delle curve; ma questa sarebbe stata una digressione fuori di luogo, e l' opera, come sta, mi pare, che vada dal suo principio fino al fine sufficientemente crescendo colle dovute gradazioni.

INDICE.

INTRODUZIONE.

Calcolo Algebraico, e suo uso nella risoluzione delle equazioni.

CAPO PRIMO. *Delle quantità algebraiche, e loro calcolo in generale.*

Nozioni sulle quantità algebraiche. pag. 1

Origine, e natura delle quantità positive, e negative. p. 4

Regole de' segni + — p. 7

Riduzione delle quantità algebraiche. p. 12

CAPO SECONDO. *Leggi del calcolo nelle quantità algebraiche.*

Calcolo delle quantità intere. p. 18

Calcolo delle quantità intere per mezzo degli esponenti. p. 20

Calcolo delle frazioni. p. 21

Calcolo delle frazioni per mezzo degli esponenti. p. 22

Estrazione delle radici nelle quantità intere, e rotte. p. 23

Calcolo delle quantità radicali. p. 27

Trasformazioni nelle quantità radicali. p. 30

CAPO TERZO. *Uso del calcolo algebraico nella risoluzione delle equazioni.*

Formazione delle equazioni. p. 35

Numero, e qualità delle radici reali delle equazioni. p. 37

Numero, e qualità delle radici imaginarie delle equazioni. p. 38

Trasformaz. delle equazioni. p. 41

Uso di queste trasformazioni. p. 43

Analisi delle equazioni di primo grado. p. 47

Analisi delle equazioni di grado più elevato del primo. p. 51

LIBRO PRIMO.

Proporzioni, e Progressioni Geometriche, ed Aritmetiche.

CAPO PRIMO. *Delle ragioni, e proporzioni geometriche, ed aritmetiche.*

Nozioni generali sulle ragioni, e proporzioni geometriche. p. 69

Proprietà comuni alle eguali ragioni geometriche semplici, e composte. p. 74

Proprietà comuni alle ineguali ragioni geometriche semplici, e composte. p. 81

Proprietà particolari alle ragioni geometriche composte. p. 82

Delle ragioni, e proporzioni aritmetiche. p. 89

Delle proporzioni armoniche, e controarmoniche. p. 91

CAPO SECONDO. *Delle progressioni geometriche, ed aritmetiche.*

Progressioni geometriche. p. 95

Progressioni aritmetiche. p. 101

Paragone delle due progressioni geometriche, ed aritmetiche. p. 106

CAPO TERZO. *De' logaritmi.*

Natura, e proprietà de' logaritmi. p. 114

Metodi, e compendj de' metodi per costruire le tavole de' logaritmi. p. 117

Riduzione d'un dato sistema di logaritmi a qualunque altro sistema cercato. p. 121

Uso delle tavole de' logaritmi comuni. p. 122

Metodo per evitare i logaritmi negativi. p. 127

LIBRO SECONDO.

Formazione, e Sommazione delle serie.

CAPO PRIMO. *Serie, che nascono dalle potenze, e dalle radici algebraiche.*

Proprietà delle potenze d'un binomio. p. 133

Evoluzione in serie delle potenze d'un binomio. p. 138

Evoluzione delle potenze d'un infinitinomio. p. 140

Evoluzione delle quantità radicali. p. 145

Altro metodo per l'evoluzione de' radicali. p. 148

Tre altre formole per l'evoluzione de' radicali. p. 149

Ultimo metodo per l'evoluzione de' radicali. p. 151

Applicazione de' metodi precedenti alle numeriche quantità radicali. p. 152

Evoluzione delle radici nelle equazioni composte. p. 158

CAPO SECONDO. *Serie, che nascono dalle frazioni algebraiche.*

Primo metodo per l'evoluzione delle frazioni algebraiche. p. 162

Secondo metodo. p. 163

Terzo metodo. p. 164

Spezzamento delle frazioni algebraiche. p. 167

Evoluzione delle frazioni continue. p. 183

CAPO TERZO. *Della sommazione delle serie, e del loro termine generale.*

Classi diverse, ed espressioni generali delle serie. 194

Trovare la somma, ed il termine generale delle serie, secondo il Metodo del P. Riccati. p. 200

Osservazioni sul Metodo del P. Riccati. p. 212

Passaggio dalle serie interrotte alle serie continuate. p. 217

Interpolazione delle serie di qualunque classe, ed ordine. p. 223

AGGIUNTA.

Memorie del P. Ruggiero Boscovich. p. 239

Memoria prima su i logaritmi negativi.

Appendice alla prima Memoria. De' logaritmi delle quantità negative.

Memoria seconda sull' evoluzione delle potenze d' un infinitinomio.

CAPO

JOANNES CAROLUS PINCETI

SOCIETATIS JESU

In Provincia Mediolanensi Præpositus Provincialis.

CUM Librum, cui titulus est: *Delle Progressioni, e Serie*; a P. Francisco Luino Societatis nostræ Sacerdote compositum, aliquot periti Viri, quibus commissum fuit, recognoverint, & in lucem edi posse probaverint: facultate nobis a R. P. Laurentio Ricci Præposito Generali communicatâ, concedimus, ut typis mandetur, si ita iis, ad quos pertinet, videbitur. In quorum fidem has literas manu nostra subscriptas, & sigillo Societatis nostræ munitas dedimus.

Mediolani die 17. Novembris 1767.

Loco ✠ Sigilli.

INTRODUZIONE.

CALCOLO ALGEBRAICO

E suo uso nella soluzione delle Equazioni.

CAPO PRIMO.

Delle quantità Algebraiche, e loro calcolo in generale.

Nozioni sulle quantità Algebraiche.

1. LE volgari cifre Arabiche 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. colle quali usasi per lo più calcolare i numeri, oltre il difetto di non essere atte ad esprimere che le quantità conosciute, rendono le operazioni del calcolo troppo prolisse, e confondono i passi delle operazioni medesime, compenetrando di mano in mano i valori de' risultati. Quindi è stato necessario esprimere e calcolare i numeri con altri segni che fossero più universali, e rendessero le operazioni del calcolo più spedite, e più chiare. Si sono assuefatti i Matematici alle lettere del Alfabeto: da principio esprimevansi con quelle cifre 1. 2. 3..... i numeri cogniti, e gli incogniti cogli *a.b.c...*, in seguito, ad esempio di Cartesio, i numeri cogniti s' incominciarono indifferentemente ad esprimere, o colle cifre 1. 2. 3..., o colle prime lettere dell' Alfabeto *a. b. c....*, e gli incogniti colle ultime *x. y....* come si usa comunemente a' nostri dì. Il calcolo delle quantità numeriche così espresse, si chiama *calcolo Algebraico*, o *calcolo delle quantità Algebraiche*, per l' uso grande ch' egli ha nell' Algebra ancor più sublime.

2. Si fanno adunque ſu queſte quantità le ſteſſe operazioni che ſi uſano ne' numeri. Coll' Addizione ſi cerca una quantità eguale ad altre quantità date, e preſe inſieme: Colla ſottrazione ſi cerca l'ecceſſo d'una quantità ſopra un' altra: Colla multiplicazione ſi cerca una quantità che così contenga una delle date, come nell'altra ſi contiene l'unità: Colla diviſione ſi cerca una quantità che così contenga l'unità, come in una delle date ſi contiene l'altra. Per indicare queſte operazioni del calcolo nelle Algebraiche quantità, ſi ſono poſti in uſo certi ſegni; per ſegno dell' Addizione ſi è ſcelto il + che ſignifica *più*; per la ſottrazione il — che ſignifica *meno*; per la multiplicazione il ×, oppure un punto che ſignifica *multiplicato per*; per la diviſione una linea di ſeparazione tralla quantità a dividerſi, e quella per cui ſi deve fare la diviſione ſcritta ſotto la prima, appunto come nelle frazioni numeriche; ſi uſano altresì due punti o il ſegno ÷ poſto tralle due quantità date per la diviſione. Il ſegno > meſſo tra due quantità indica che quella è maggiore verſo cui ſta rivolta l'apertura del ſegno.

$a + b$ ſignifica b congiunto ad a

$a - b$ ſignifica b ſottratto da a

$$\left.\begin{array}{l} a \times b \\ a \,.\, b \\ a\,b \end{array}\right\}$$ ſignifica a moltiplicato per b; nell'eſpreſſione ab s'intende frappoſto il ſegno di multiplicazione.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a}{b} \\ a : b \\ a \div b \end{array}\right\}$$ ſignifica a diviſo per b

$$\left.\begin{array}{l} a > b \\ a < b \end{array}\right\}$$ ſignifica a maggiore di b / a minore di b

3 Le quantità a, b, c.... ſi chiamano quantità *incompleſſe ſemplici*; le $a\,b$, $a\,b\,c$..... ſi chiamano *incompleſſe compoſte*; ed una quantità formata da più quantità incompleſſe, ma inſieme congiunte co' ſegni + —, ſi chiama quantità compleſſa; ſarà *binomia*, ſe ſarà formata da due quantità incompleſſe (ciaſcuna di queſte ſi chiama *termine*) come $a + bc$; ſarà *trinomia*, ſe ſarà formata da tre termini come $ab - cd + f$; ſarà... ec., e ſi chiamerà *finitinomia*, o *indefinitinomia* ſe ſarà formata da un numero finito, o indefinito di termini. Termine *ſimile* ad un altro, ſignifica termine formato dalle medeſime lettere dell'altro, le quantità compleſſa *ſimile* ad un altra, è quella quantità in cui tutti i termini ſono ſimili, riſpettivamente ai termini dell'altra,

4. In ogni termine d'una quantità algebraica come $5\,a\,b\,x$ vanno diſtinti i *coeficienti* dagli *eſponenti*. Quanto ai coeficienti: 1.° Altri ſono coeficienti del termine, ed altri ſono coeficienti di una o più lettere; i coeficienti del termine, altrimenti detti coeficienti *numerici*, ſono que' numeri che precedono verſo la ſiniſtra qualunque quantità meramente algebraica; i coeficienti d'una o più lettere ſono tutte le quantità, che con quell'una o più lettere formano il dato termine. Nel termine $5abx$, il numero 5 è coeficiente numerico del termine $5abx$; $5ab$ è coeficiente di x; $5ax$ è coeficiente di b; $5bx$ è coeficiente di a. 2.° Que' termini che non hanno altro coeficiente numerico, hanno almeno per coeficiente l'unità, così il coeficiente numerico di abx è 1, eſſendo $a\,b\,x$ eguale a $1\,abx$. 3.° La diverſità de' coeficienti numerici non turba la ſomiglianza, o diſſomiglianza di due termini; cioè per diſtinguere le quantità ſimili dalle diſſimili, non ſi ha riguardo che alle lettere; $5\,a\,b\,x$ è ſimile ad abx.

5. Quanto agli eſponenti. 1.° Altro è eſponente dalle dimenſioni d'un termine, altro è eſponente dalle dimenſioni d'una lettera del termine medeſimo; eſponente delle dimenſioni d'un termine, è il numero che eſprime di quante lettere è formato quel termine; il termine ab è di due dimenſioni, perchè è formato di due lettere; $a\,b\,c$ è di tre dimenſioni...... Queſto nome di dimenſioni è preſo dall'analogía alla geometría, come ſi ve-

vedrà a suo luogo. Alcuni chiamano *piano* il termine ab, chiamano *solido* il termine abc . . ec. Esponente delle dimensioni d'una lettera del dato termine, è il numero che esprime quante volte sia la data lettera ripetuta nel dato termine; nel termine $3aab$, l'esponente delle dimensioni di a è 2, e l'esponente delle dimensioni di b è l'unità. 2.° Quindi le dimensioni d'una lettera, o d'un termine, non dipendono da' coeficienti numerici. Se una lettera ha più d'una dimensione, si suole essa scrivere una sol volta, con alla destra in sito un po elevato l'indice delle sue dimensioni; invece di scrivere $3aab$, si scrive $3a^2b$; in certi casi è utile lo scrivere ancora l'unità per esponente delle dimensioni d'una semplice quantità incomplessa; *in vece di scrivere* $3a^2b$, si scrive $3a^2b^1$.

Origine, e natura delle quantità algebraiche positive, e negative.

6. LE quantità algebraiche che sono precedute alla sinistra dal segno + si chiamano quantità *affermative*, o *positive*, e quelle che sono precedute dal segno — si chiamano *defettive*, o *negative*. Ciò non basta per intendere a fondo la natura delle quantità positive e negative, e l'uso che si fa nell'algebra de' segni + —; prendiamo la cosa da' suoi veri principj.

7. Ad esprimere l'elevazione del Sole sopra l'Orizonte, si suole usare la serie naturale de' numeri 0. 1. 2. 3. . . . . E' certo che quando il Sole sta all'Orizonte, l'elevazione sua sopra l'Orizonte è nulla, o zero; quando s'è alzato sopra l'Orizonte d'una determinata quantità presa per unità di paragone, per esempio d'un grado, la sua elevazione si può chiamare 1, e corso ch' egli abbia, alzandosi sempre più, un altro grado, la sua elevazione sarà 2, e così nel resto. Ad esprimere l'abbassamento del Sole sotto l'Orizonte, si può usare la stessa serie, essendo zero il suo abbassamento quando egli sta all' Orizonte, potendosi prendere per 1 il suo abbassamento, quando egli si sia depresso d'un grado . . . . ec.

Quindi volendo riferire l'alzamento e l'abbassamento del Sole rispetto all' Orizonte alla medesima misura di gradi d'un circolo; dinotati successivamente co' termini della serie naturale 0. 1. 2. 3. . . ; si avrà sempre un' espressione ambigua, non intendendosi dal numero, per esempio, di 3 gradi, che il Sole si sia alzato o abbassato rispetto all' Orizonte di gradi tre. I numeri hanno costantemente la loro significazione assoluta di 3, di 4. . . ., e da se non portano in conto alcuno la relativa d'essere l'1 . 2. . . . preso piuttosto in questa, che in quella direzione, se non per qualche segno ad essi estrinseco, e preso ad arbitrio.

Per determinarla in qualche modo al numero de' gradi del moto, diretto ad una parte, si mette verso la sinistra il segno +, e quel numero de' gradi si chiama *positivo*; al numero de' gradi del moto, indirizzato alla parte opposta si mette verso la sinistra il segno —, e quel numero de' gradi si chiama *negativo*. Così il numero per se stesso esprimerà la quantità del movimento; il segno premesso al numero indicherà la direzione del movimento medesimo ad una delle parti opposte. Si dica lo stesso delle altre quantità (per esempio de' crediti e debiti d'un mercante; della sanità, o infermità di un cittadino . . .) che hanno tra se qualche opposizione, secondo un certo risguardo, non esprimibile da' puri numeri.

8. Quando due quantità sono tra se opposte secondo qualche rispetto, la prima esclude e nega l'altra secondo il rispetto medesimo; quindi la prima ha tratto il nome di quantità negativa, e la seconda di positiva. Ma siccome due quantità tra se opposte secondo qualche rispetto, si escludono e negano vicendevolmente secondo quel rispetto medesimo, si può prendere o l'una o l'altra per positiva, come più piace. Nell' esempio dell' elevazione o abbassamento del Sole, rispetto all' Orizonte, tanto il primo si op-

ſi oppone al ſecondo, quanto queſto al primo movimento; amendue, o piuttoſto qualſivoglia dei due ſi può prendere per poſitivo, laſciando l'altro per negativo. Ordinariamente tralle quantità così oppoſte, ſi prende per poſitiva quella che ſi preſenta più naturalmente a conſiderarſi la prima; così l'elevazione del Sole ſopra l'Orizonte ſi ſuole prendere per movimento poſitivo, e l'abbaſſamento per negativo.

9. Non tutte le quantità hanno le ſue oppoſte, e quantunque una quantità abbia la ſua oppoſta, non è neceſſario di conſiderare queſta oppoſta quantità. Le quantità numeriche, in quanto ſono tali, non hanno quantità a ſe oppoſte; non il zero, che per non eſſere quantità non può dirſi oppoſto alle quantità; non le quantità minori del zero, che per non dare di ſe idea alcuna chiara e diſtinta, non poſſono neppure avere l'eſiſtenza nella immaginazione; non .... ec. Si può all'incontro conſiderare un alzamento del Sole ſecondo il ſuo accreſcimento numerico qualunque, ſenza avere alcun riſguardo alla quantità oppoſta, cioè all' abbaſſamento del Sole riſpetto all' Orizonte medeſimo: quando però ſi dice $-a$, queſta quantità non ha il ſuo eſſere di *meno*, che per l'apporſi che fa al $+a$. Quindi 1.º non tutte le quantità, in quanto ſono tali quantità, poſſono avere i ſegni $+$ $-$, e le quantità, che non hanno il ſegno $-$ non ſempre ſono quantità poſitive, cioè non ſempre racchiudono nella loro idea l'oppoſizione ad altre quantità, nè ſi chiamano poſitive, ſe non perchè vengono conſiderate e poſte, dirò così, da ſe ſteſſe; propriamente dovrebbono chiamarſi *puri numeri*. 2.º Le quantità, che hanno il ſegno $-$ ſempre ſono quantità negative, cioè ſempre, e neceſſariamente preſuppongono, o importano l'idea d'oppoſizione ad altre quantità, nè ſono puri numeri, nè ſi ha di eſſe idea alcuna, ſe non vi s'attacchi qualche idea d'oppoſizione ad altre quantità. 3.º Tanto le quantità poſitive $+a$, quanto le negative $-a$ ſono quantità reali; da che $+a$ $-a$ non differiſcono, che ne' ſegni, i quali non mutano la natura di a, ma ſolamente *dinotano una diverſa denominazione ad eſſo eſtrinſeca*, di direzione diverſa ... ec.

Regole de' ſegni $+$ $-$ *nel Calcolo delle quantità poſitive, e negative.*

10. DAl fin qui detto è manifeſto, che la quantità poſitiva, o negativa porta ſeco due ſtati; cioè lo ſtato di *numero*, e lo ſtato di *qualche* oppoſizione o contrarietà; ſecondo il ſuo ſtato numerico, eſſa è una tale o tale altra quantità, 1. 2. 3... ec., ſecondo il ſuo ſtato di oppoſizione (che ben ſi può chiamare ſtato *ſpecifico*) è di più *una cert' altra coſa oppoſta ad un' altra ſimile*, che per avventura ſi ſcuopra in una nuova data quantità. Lo ſtato numerico d'una quantità ſi dinota co' numeri 1. 2... ec.; lo ſtato ſpecifico della medeſima ſi indica co' ſegni $+$ $-$. Quindi nel calcolo delle quantità poſitive o negative, oltre al trovare i riſultati delle date quantità conſiderate nel loro ſtato numerico, è meſtieri aſſegnare lo ſtato ſpecifico, in cui collocare ſi debbano i riſultati, cioè il ſegno $+$ o $-$ da premetterſi ai medeſimi. Lo ſtato numerico de' riſultati ſi conoſce dalle regole ordinarie del calcolo; lo ſtato ſpecifico de' medeſimi ſi conoſcerà dalle regole ſeguenti.

11. Regole de' ſegni. 1.º La quantità negativa aggiunta ad una negativa, la aumenta nella ſua negazione, ſottratta la ſcema. 2.º La quantità negativa aggiunta ad una poſitiva la ſcema nella ſua poſizione, ſottratta la aumenta. 3.º La quantità poſitiva aggiunta ad una negativa la ſcema nella ſua negazione ſottratta la aumenta. 4.º La quantità poſitiva aggiunta ad una poſitiva la aumenta, ſottratta la ſcema. 5.º La quantità negativa di una negativa, o la poſitiva di una poſitiva *è una quantità poſitiva*, come pure la quantità poſitiva della negativa, o la negativa di una poſitiva *è una quantità negativa*. Queſt' ultima proprietà delle quantità precedute da ſegni $+$ e $-$ ſi può eſprimere così:

$--=+$ .. meno il meno dà più
$++=+$ .... più il più dà più
$-+=-$ ... meno il più dà meno
$+-=-$ .... più il meno dà meno.

Tutte queste regole de' segni sono conseguenze manifeste dall' idea di opposizione che regna nelle quantità precedute da' segni $+$ e $-$; basterebbe applicarle a qualche esempio d'alzamento e d'abbassamento del sole rispetto all' orizonte, per renderle chiare e palpabili anche alle persone più rozze, e volgari. Quale è lo stato contrario al *discendere?* certo è l'*ascendere;* ciò intendo di dire quando noto che *meno il meno dà più;* qual è .... ec.?

12. Quindi, e dalla natura della multiplicazione e divisione si hanno le regole de' segni per la multiplicazione, e divisione delle quantità positive e negative, cioè:

$$-\overset{\times}{\div}-=+ \qquad -\overset{\times}{\div}+=-$$
$$+\overset{\times}{\div}+=+ \qquad +\overset{\times}{\div}-=-$$

ossia i segni simili danno *più*, i segni dissimili danno *meno*. Imperciocchè; il multiplicatore non mostra solamente quante volte si debba a se stesso aggiungere il multiplicando, ma in quale stato ancora si debba riporre il prodotto; ed il divisore non solamente indica qual parte si debba prendere del dividendo, ma in quale stato si debba riporre questa parte medesima; conseguentemente, dovendosi questo stato intendere in ordine a quello in cui già si ritrova il multiplicando ed il dividendo, se essi sieno negativi, e collocare si debbano in uno stato negativo, il prodotto ed il quoto avranno uno stato negativo del negativo, cioè positivo, e se si debbano collocare in uno stato positivo, avranno uno stato positivo del negativo, cioè negativo. Se il multiplicando ed il dividendo sieno positivi, e collocare si debbano in uno stato negativo, il prodotto ed il quoto avranno uno stato negativo del positivo, cioè negativo, e se si debbono collocare in uno stato positivo, avranno uno stato positivo del positivo, cioè positivo. Quindi lo stato del prodotto ab di $-a\times-b$ sarà $--=+$
di $-a\times+b$ sarà $+-=-$
di $+a\times-b$ sarà $-+=-$
di $+a\times+b$ sarà $++=+$. Lo stato del quoto $\frac{a}{b}$ per ... ec.

13. Quindi. Nella multiplicazione; 1.° Se il multiplicatore sarà negativo, il prodotto avrà un segno contrario a quello del multiplicando. 2.° Se il multiplicatore sarà positivo, il prodotto avrà il segno del multiplicando. 3.° Se le quantità a multiplicarsi saranno pari in numero, e ciascuna negativa, il prodotto sarà positivo. 4.° Se saranno impari, e ciascuna negativa, il prodotto sarà negativo. 5.° O sieno pari, o sieno impari in numero le quantità positive, il loro prodotto sarà sempre positivo.

Nella divisione. 1.° Se il dividendo sarà negativo, il segno del quoto sarà contrario del segno al divisore. 2.° Se il dividendo sarà positivo, il segno del quoto sarà conforme al segno del divisore. 3.° ... ec. Queste ed altre simili annotazioni, se non servono alla pratica del calcolo, servono a meglio conoscere la natura de' segni.

14. Ma, come va (dicono alcuni) che i segni $+-$ si usano da' Matematici (e noi pure lo abbiamo indicato al num. 2.) per l'addizione e sottrazione de' numeri? che hanno esse mai di comune le quantità aggiunte o sottratte, colle quantità positive o negative? quali saranno le regole de' segni nel calcolo, non delle quantità positive e negative, ma delle quantità aggiunte e sottratte? Questi sono i nodi, da' quali non sanno svolgersi i meno esperti.

Due però sono le risposte: 1.° La natura de' numeri non esige che vengan essi ad altri aggiunti o sottratti; dunque il considerare i numeri nello stato di addizione o sottrazione rispetto ad altri numeri, è un fissare a' numeri medesimi un nuovo stato ad essi estrinseco; stato, che considerato in ordine all'

all' effetto che produce nelle quantità, alle quali vengono aggiunti, o dalle quali ſi ſottraggono, è in ſe ſteſſo perfettamente oppoſto. Certo che altra è la mutazione introdotta in una quantità per l'addizione, altra è quella che in eſſa ſi genera per la ſottrazione d'un' altra quantità, e la prima è affatto oppoſta alla ſeconda: Se la prima è mutazione in accreſcimento, che ſi può dire mutazione *in più;* la ſeconda è mutazione di ſcemamento, che ſi può dire mutazione *in meno;* dunque i numeri in quanto aggiunti ad altri ſi poſſono, e ſi devono conſiderare come quantità poſitive, in quanto da altri ſottratti ſi poſſono, anzi ſi devono conſiderare come quantità negative; dunque a quegli ſi dovrà premettere il ſegno $+$, a queſti il $-$, e ſi dovranno maneggiare nel calcolo come le altre quantità poſitive e negative. Quindi è manifeſto, che il calcolo delle quantità aggiunte o ſottratte, non è che un *ramo* del calcolo delle quantità poſitive e negative; i ſegni $+$ e $-$ ſono ſegni proprj a denotare lo ſtato di contrarietà, che regna tra due quantità date (queſte quantità ſono il *genus*), e per parità di ragione ſi devono appropriare alle quantità aggiunte e ſottratte, che ſono *ſpecies* di quelle prime.

2.° Si aſtragga per poco la mente da ciò che ſi è detto ſulla natura delle quantità poſitive e negative, e ſulle regole de' ſegni $+$ $-$. Sia il $+$ un mero ſegno arbitrario dell' addizione, ed il $-$ un ſegno arbitrario della ſottrazione; cerchiamo quali ſieno le regole da oſſervarſi nel calcolo per le quantità inſieme congiunte, o ſottratte con queſti ſegni.

Nella ſottrazione. Sottraendo $14-3$ da 25, ſi ha $25-(14-3)$ $=25-14+3$. Imperciocchè dal numero 25 non vuolſi ſottratto tutto il numero 14, ma il 14 ſminuito di 3; dunque troppo piccolo è il reſiduo $25-14$, e tanto più piccolo, quanto il minutore 14 è più grande del dovere, cioè il reſiduo $25-14$ è più piccolo di 3 di quello dovrebbe eſſere; dunque per avere il vero reſiduo di $14-3$ ſottratto da 25, conviene aggiungere 3 a $25-14$;

dunque

dunque $25-(14-3)=25-14+3$. Quindi $-+=-$
$--=+$
ſimilmente ſi avrà $25+(14-3)=25+14-3$; cioè $++=+$
$+-=-$

Nella multiplicazione. Multiplicando $14-3$ per $5-2$, ſi ha
$(14-3)\times(5-2)=(14\times5-3\times5)+(3\times2-14\times2)$. Imperciocchè,
ſe il multiplicatore foſſe l'intero numero 5, il prodotto ſarebbe
$(14-3)\times5$; cioè non ſarebbe l'intero numero 14, che dovreb-
beſi multiplicare per 5, ma il numero 14 ſminuito di 3; dun-
que multiplicando 14 per 5 ſi multiplicherebbe per 5 anche il 3
che ſta, e non dovrebbe eſſervi, nel numero multiplicando; dun-
que 14×5 ſarebbe maggiore del dovere di tutto il numero 5×3;
dunque il prodotto vero ſarebbe $14\times5-5\times3$. Non è il nu-
mero intero 5 che deve multiplicare $14-3$, ma il numero 5 ſmi-
nuito di 2; dunque nel prodotto $14\times5-5\times2$ c'è di più il pro-
dotto di $14-3$ multiplicato per 2; dunque per avere il vero pro-
dotto di $(14-3)\times(5-2)$ ſi deve dal prodotto $14\times5-5\times2$ ſot-
trarre il prodotto di $(14-3)\times2$, cioè ſi deve ſottrarre $14\times2-3\times2$;
dunque, per le regole date nell' eſempio della ſottrazione, il vero
prodotto ſarà $(14\times5-5\times3)+(3\times2-14\times2)$.
Quindi $+\times+=+$; $-\times+=-$;
$-\times-=+$; $+\times-=-$. Un ſimile diſcorſo vale per la
diviſione.

15. Ecco adunque, che prendendo per ſegno arbitrario dell'
addizione il $+$, e della ſottrazione il $-$, dalla ſola natura delle
operazioni aritmetiche ſi hanno per il calcolo delle quantità ſom-
mate, e ſottratte le ſteſſe regole, che ſi ebbero già per le quan.
tità poſitive e negative; dunque, quantunque le quantità ſom-
mate e ſottratte non foſſero da annoverarſi tralle quantità po-
ſitive e negative, ſi dovrebbero maneggiare nel calcolo come le
quantità poſitive e negative; cioè comunque diverſi da $+$ $-$ foſ-
ſero i ſegni dell' addizione e ſottrazione, le loro regole nel cal-

 colo

colo sarebbero sempre analoghe alle regole de' segni + — presi per le sole quantità positive e negative; dunque e si possono prendere questi segni + — per indicare la somma e la sottrazione, e si possono, alle quantità sommate e sottratte, adattare le regole de' segni, dedotte prima per le quantità positive e negative.

16. La prima risposta è più decisiva, e leva ogni imbarazzo ne' calcoli; chi sostiene l'altra, dovrà in primo luogo sempre distinguere due generi di quantità positive e negative; cioè quello che viene dalla opposizione di stato, e quello che nasce dall' addizione e sottrazione delle quantità date. 2.° Dovrà nella risoluzione de' problemi esaminare ogni risultato che abbia il segno —, per conoscere se abbia questo segno perchè si richiami all' opposizione d'un' altra quantità simile che sia stata presa per positiva, o perchè ciò portino solamente le regole dell' addizione e sottrazione. Nel primo caso saprà l'uso che deve farsi del risultato, non lo saprà nel secondo, o se voglia anche nel secondo caso adattarvi le regole del primo, contraddirà col fatto alla sua dottrina. 3.° Commetterà poi un errore inescusabile e pericoloso, se vorrà ridurre l'idea delle quantità positive e negative del primo genere, all' idea delle quantità sommate, o sottratte, quasi che quella dipenda da questa. E' vero che il numero —3 gradi di elevazione del Sole si ha aggiungendo 8 gradi d'abbassamento, a 5 gradi d'elevazione del Sole medesimo, ma non è necessario per avergli ricorrere a questa somma; cioè a dire, è possibile, ma non è necessario, che quel —3 venga da un' addizione.

Riduzione delle quantità algebraiche.

17. La *riduzione* delle quantità algebraiche consiste nel disporre col miglior ordine, e sotto la più semplice espressione, le quantità algebraiche o date o trovate colle consuete operazioni del calcolo. Si osservino perciò le regole seguenti:

Regola prima. Le lettere di ciascun termine si dispongano più che si può coll' ordine alfabetico.

Regola seconda. I termini delle quantità complesse si ordinino relativamente alle dimensioni di qualche lettera.

Regola terza. Si riducano ad una sola le quantità incomplesse simili, che per avventura si trovino co' segni simili in una complessa quantità data, e si ommettano quelle, che si distruggono o si elidono co' segni contrarj.

Regola quarta. Si conservi in ciascun termine la legge degli omogenei.

18. Per riguardo alla prima regola, è chiaro, che la quantità $acfbd$ si deve scrivere così $abcdf$, succedendo all' a nell' ordine alfabetico il b, e non il c, nè al b l'f, ma il c... ec S'è detto, che devonsi così disporre le lettere *per quanto si può*; cioè a dire quando ciò non turbi la seconda regola dell' ordinare le quantità complesse.

19. Per osservare con facilità questa seconda regola, si ordini primamente ciascun termine della quantità data per risguardo ad una lettera comune a molti; poi si passi ad ordinare i termini tra se, per risguardo alle dimensioni della lettera ordinante. Mi spiego: Nella quantità complessa $a^3 - 3abc + b^2c + 2a^2c - a^2b$ io osservo, che la lettera a è in tutt' i termini, fuorchè nel terzo; prendo ad arbitrio questa lettera a per distintivo de' termini medesimi, e sì gli dispongo, che la lettera a stia in ciascuno di questi più verso la mano destra, che non le altre; scrivo a cagione d'esempio non $-a^2b$, ma $-ba^2$; non $-3abc$, ma $-3bca$..., così sarà ordinato ciascun termine della quantità proposta. Per ordinare tra di loro i termini medesimi, scrivo per primo termine verso la sinistra quello, in cui la lettera a si trova alla maggior dimensione; scendendo verso la destra scrivo quello, in cui quest' istessa lettera a si trova alla dimensione prossimamente minore della prima...., e così successivamente, fino a quegli che

che non contengono la lettera a; questi saranno gli ultimi. Ordinando la predetta quantità complessa, si avrà $a^3 + 2ca^2 - ba^2 - 3bca + b^2$.

20. Nelle quantità così ordinate per rapporto alle dimensioni d'una lettera, si chiama *termine* il complesso di tutte quelle quantità incomplesse, in cui la lettera che le distingue, ascende al medesimo numero di dimensioni, e tutte queste quantità incomplesse, si scrivono l'una sotto l'altra; la quantità precedente conterrà dunque soli quattro termini, e si scriverà così $a^3 + 2ca^2 - 3bca + b^2c$; per non iscostarsi dalla deffinizione
$-\ ba^2$
della parola *termine* data sopra, si consideri l'aggregato di tutte le quantità incomplesse che stanno a sinistra di a^2 nella quantità così ordinata, come coeficiente di a^2; si vedrà in appresso che si ha $2ca^2 - ba^2 = (2c - b)a^2$.

21. Talvolta gli esponenti delle dimensioni della lettera che distingue i termini non vanno da sinistra a destra sminuendo successivamente d'un unità. In questo caso, se sia eguale la differenza del primo esponente al secondo, del secondo al terzo, ... si supporrà bene ordinata la quantita data, altrimenti si metterà frammezzo un asterisco $*$, o un altro segno simile per supplire le veci del termine che manca: la quantità $a^6 + b^3a^4 - b^4a^2 + b^6$ è bene ordinata per a, ma ordinandola per b, si avrà $b^6 * - a^2b^4 + a^4b^3 ** + a^6$, ed in questa quantità, il secondo, il quinto, ed il sesto termine sono eguali a zero, o più veramente a $\pm$ zero multiplicato per b^5 nel secondo, per b^2 nel quinto, e per b^1 nel sesto termine.

22. E' manifesto che la terza regola per le riduzioni abbraccia tre casi. 1.° Le quantità incomplesse simili, che hanno il medesimo segno, si riducono ad una sola che ha il segno comune alle date, e per coeficiente la somma de' coeficienti delle medesime. La quantità $2a^2 + 3b + a^2$ si riduce a $(2+1)a^2$

$+ 3b = 3a^2 + 3b$. 2.° Se queste incomplesse quantità simili hanno i segni contrari, il segno della quantità maggiore sarà il segno della ridotta, che avrà per coeficiente la differenza de' coeficienti delle quantità date. La quantità $3ab^3 + 2ab^2 - ab^3$ si riduce a $(3-1)ab^3 + 2ab^2 = 2ab^3 + 2ab^2$. 3.° Quindi se i coeficienti delle quantità simili che hanno i segni contrarj sono tra se eguali, si ommettono interamente le quantità date; $3ab + 2cd - 3ab = 2cd$.

23. Si dicono di *dimensioni omogenee* quelle quantità incomplesse, che hanno il medesimo numero per esponente delle dimensioni; di *dimensioni eterogenee* le altre. La quantità ab è omogenea a cd, e siccome detto è, che i coeficienti non mutano le dimensioni d'una quantità, così non ne turbano l'omogeneità, o vi siano, o manchino nelle quantità date; $4ab$ è omogeneo con $10cd$. Quindi in una equazione sono omogenei i termini che la compongono, quando la somma delle dimensioni delle lettere in ciascun termine, è eguale alla somma degli esponenti delle lettere negli altri. L'equazione $a^2x^2 + a^2y^2 = 0$ è omogenea. E' molto necessario, massime nella soluzione de' problemi, il rendere omogenei tutt' i termini d'un equazione, o d'una complessa quantità; ciò si chiama *conservare*, ovvero *osservare la legge degli omogenei*.

24. Due sono i metodi più usati per ridurre all'omogeneità i termini d'una data quantità complessa. Primo metodo, per mezzo dell'unità. Si moltiplichi il termine che ha minori dimensioni, o si divida quello che ne ha maggiori, per l'unità, fatta eguale a qualche lettera che non entri nella quantità data, o che tralle date si possa prendere per l'unità. A rendere omogenei i termini di $abc + cd$, si multiplichi cd, o si divida abc per $f = 1$; si avrà nel primo caso $abc + cdf$, e nel secondo caso $\frac{abc}{f} + cd$.

Secondo metodo, per mezzo delle sostituzioni. Egli è chiaro, anche senza avvertirlo, che in una quantità qualunque, invece d'una o più lettere, se ne può inserire una o più altre, che sieno, o si suppongano eguali a quelle; appunto come se la distanza da un luogo ad un altro sia di due tese lineari, si può egualmente dire che è di dodici piedi lineari. Su questo principio (chiamato *principio di sostituzione*) si fondano tutte quasi le regole dell'Analisi; vero è che per fare le sostituzioni nelle quantità algebraiche, è uopo sapere prima il calcolo delle medesime; ma noi accenniamo qui il metodo di cui abbisogniamo nel decorso, la pratica la riservi ciascuno a miglior luogo. Nella quantità $a + bxy + cx^2y^2 + ex^3y^3$, si faccia $y = \frac{1}{z}$ si avrà $a + \frac{bx}{z} + \frac{cx^2}{z^2} + \frac{ex^3}{z^3}$ quantità omogenea; nella quantità $x^2 + z^3 + az$, si faccia $z^3 = y^2$, sarà $x^2 + y^2 + az$ quantità omogenea ... ec. Colle sostituzioni si rendono omogenei i termini massime nelle equazioni, col cambiare gli esponenti della equazione proposta, con una certa legge; e si può determinare in quai casi, e con quali sostituzioni si debbano o possano fare somiglianti trasformazioni, ciocchè non si può qui spiegare più a lungo.

25. Resta a dimostrare, che ne' metodi precedenti le quantità $\frac{bx}{z}$, $\frac{cx^2}{z^2}$, e simili siano d'una sola dimensione, e lo stesso argomento varrà per gli altri casi. Ciò dipende dal teorema generale per trovare l'esponente delle dimensioni d'una frazione algebraica; egli è il seguente. L'esponente delle dimensioni di una frazione algebraica è eguale al residuo, che si ha sottraendo l'esponente delle dimensioni del denominatore dall' esponente delle dimensioni del numeratore; questo teorema si dimostra facilmente così: ab, che è un prodotto de' due fattori a, b, è di due dimensioni, e se si divida ab per uno de' fattori a, resta b

per

per quoziente che è d'una sola dimensione; dunque quante sono le dimensioni al denominatore d'una frazione, altrettante se ne elidono al numeratore, e l'esponente delle dimensioni residue è la differenza de' detti esponenti; dunque le dimensioni d'una frazione sono indicate dalla detta differenza; quindi è, che essendo due le dimensioni al numeratore di $\frac{bx}{x}$, ed una al denominatore, l'esponente delle dimensioni di $\frac{bx}{x}$ sarà $2-1$, cioè l'unità, e così nel resto.

26. Si noti 1.° Che se il denominatore avrà più dimensioni che il numeratore, l'esponente delle dimensioni delle frazioni sarà negativo; e se il denominatore avrà egual numero, o un numero minore di dimensioni che il numeratore, l'esponente delle dimensioni della frazione sarà zero, o positivo. Le frazioni d'esponente negativo si chiamano, da Eulero, e da altri, *frazioni proprie*. 2.° Che colle regole date, ed applicate solamente alle quantità incomplesse, si conosce l'esponente delle dimensioni d'una quantità complessa; il numero de' fattori, che la compongono, (che sono rappresentabili da a, b, c, ec.) è l'esponente delle sue dimensioni. Dimostreremo altrove, che in una quantità omogenea, ed ordinata per una lettera, il numero de' fattori componenti è eguale all'esponente massimo di quella lettera; così $x^3 + 3x^2b + 3xb^2 + b^3$ è di tre dimensioni. 3.° Quindi si ha l'esponente delle frazioni, che hanno per numeratore, e per denominatore una quantità complessa.

C CAPO

CAPO SECONDO.

Leggi del Calcolo nelle quantità algebraiche.

Calcolo nelle quantità intere.

27. ADdizione. Si fcrivano tutte le date quantità in una fola ferie, da finiftra a deftra, ritenendo il fegno dato a ciafcun termine; fi facciano fu quefta ferie le riduzioni del n. 22. Per fommare $a+bc$ con $bc-a$, fi fcriva $a+bc+bc-a$, e riducendo fi avrà $2bc$.

28. Sottrazione. Si mutino tutti i fegni nel minutore, e fi fommino infieme tutte le date quantità. Per fottrarre $ac-b$ da $d+b+ac$, fi mutino i fegni ad $ac-b$, e fommando $-ac+b$ con $d+b+ac$, fi avrà $d+2b$.

29. Multiplicazione. Per le quantità incompleffe, conviene trovare il prodotto delle lettere, il prodotto de' coeficienti numerici, ed il fegno da premettervi. Per le lettere, bafta congiungere le lettere delle quantità a multiplicarfi colle lettere dell' altra quantità, fenza interporvi alcun fegno; per i coeficienti numerici fervono le regole della volgare aritmetica ne' numeri; per i fegni ritenganfi le regole fopra dimoftrate, cioè che il fegno del prodotto è $+$, fe fono fimili i fegni delle quantità date, e che il fegno del prodotto è $-$ fe i fegni delle date quantità fono diffimili. Multiplicando $4bc$, offia $+4bc$ per $-5ad$, fi avrà 1.° Per le lettere $bc \times ad = abcd$; 2.° Per i coeficienti $4 \times 5 = 20$; 3.° E per fegno del prodotto $20abcd$ fi ha $- \times + = -$; cioè $4bc \times -5ad = -20abcd$.

Per le quantità compleffe, finitinomie, ed indefinitinomie. Si multiplichino colle regole precedenti tutt' i termini d'una delle date quantità per ciafcun termine dell' altra; fi faccia la fomma di tutt' i particolari prodotti. Multiplicando $a-b$ per $c-d$, fi avrà $(a-b)(c-d) = (a-b) \times c + (a-b) \times -d = (ac-bc) + (bd-ad)$.

30. Divifione. Per le quantità incompleffe. Il coeficiente numerico del quoziente, fi ha colle regole dell' aritmetica numerica; il fegno del quoto fi ha come nella multiplicazione; per le lettere; fi fcrivano le lettere del divifore fotto le lettere del dividendo a modo di frazione; fi fcancellino le lettere comuni ad amendue i termini; così $+6bc$ divifo per $-3c$, dà per fegno del quoto $+ \div - = -$; per coeficiente del quoto $\frac{6}{3} = 2$, e per le lettere $\frac{bc}{c} = b$; cioè $6bc \div -3c = -2b$. Ho detto di fcancellare le lettere comuni; dacchè è evidente, che bc è eguale a b multiplicato per c; dunque dividere bc per c fignifica dividere un prodotto per uno de' fuoi fattori, che anche nella aritmetica numerica dà l' altro fattore per quoto.

Per le quantità compleffe finitinomie. Si ordini il dividendo ed il divifore per una ifteffa lettera; fi divida il primo termine del dividendo per il primo termine del divifore; fi fottragga dal dividendo, il prodotto del quoto in tutto intero il divifore; e fulle quantità refidue fi rifaccia la fteffa operazione, fino ad avere zero per refiduo, o una quantità non più divifibile per il divifore, da fcriverfi a modo di frazione a compimento del quoto, come ne' numeri. A dividere a^2-b^2 per $a+b$, ftando amendue le quantità ordinate per a; fi divida il primo termine a^2 del dividendo per il primo termine a del divifore, e fi fcriva a per quoto; fottraendo da a^2-b^2 il prodotto di $a+b$ in a, fi ha $-ab+b^2$ per refiduo, fu cui operando come fe foffe un nuovo dato dividendo, fi avrà $-b$ per fecondo ed ultimo termine del quoziente.

Per le quantità compleffe infinitinomie. Si ftabilifca prima d'ogn' altra cofa il numero de' termini, che fi vogliono avere nel quoziente, e fi fcrivano altrettanti termini del dividendo A, e del divifore B al luogo della divifione; fi ordinino al contrario delle quantità finite (cioè fi metta per primo termine quella quantità in-

incompleffa, in cui la lettera, che diftingue i termini, afcende al più piccolo numero di dimenfioni), e fi operi come nelle quantità finite.

Calcolo delle quantità intere per mezzo degli efponenti.

31. Si chiama *calcolo delle quantità intere per mezzo degli efponenti* il calcolo delle quantità, che hanno la forma a^m, a^n, fatto per mezzo de' loro efponenti. Le regole di quefto calcolo fono foltanto per la multiplicazione e per la divifione, e fi deducono da n. 29. 30. Dal n. 29. fi ha $a^3 \times a^2 = aaa \times aa = aaaaa = a^5$; ma $a^5 = a^{3+2}$; dunque $a^3 \times a^2 = a^{3+2}$ quindi $a^m \times a^n = a^{m+n}$.

Dal n.30. $a^5 : a^3 = \frac{a^5}{a^3} = \frac{aaaaa}{aaa} = aa = a^2$; ma $a^2 = a^{5-3}$; dunque $a^5 : a^3 = a^{5-3}$; quindi $a^m : a^n = a^{m-n}$

Cioè la fomma degli efponenti m, n, è l'efponente del prodotto di a^m a^n, e la differenza dell'efponente n dall'efponente m è l'efponente del quoto di $\frac{a^m}{a^n}$

32. Quindi l'efponente delle dimenfioni di a può effere pofitivo, negativo, o zero, fecondo che in a^{m-n} farà n minore, maggiore, o eguale ad m. Quindi ancora 1.° $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$; 2.° $a^0 = 1$; dacchè multiplicando a^{-m} ed $\frac{1}{a^m}$ per la fteffa quantità a^{2m}, fi ha $a^{-m} \times a^{2m} = a^m$; $\frac{1}{a^m} \times a^{2m} = a^m$: Ed $a^0 \times a^m = a^{0+m} = a^m$; cioè multiplicando una quantità per a^0, non fi muta il valore che aveva prima, ciocchè è proprio dell'unità. Quefte due ultime propofizioni, fi provano ancora altrimenti così: $\frac{a^5}{a^7} = \frac{1}{a^2}$; ma $\frac{a^5}{a^7} = a^{5-7} = a^{-2}$; dunque $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$; innoltre

noltre $\frac{a^5}{a^5} = 1$; ma $\frac{a^5}{a^5} = a^{5-5} = a^0$; dunque $a^0 = 1$.

Nota. La potenza a^{-n} fta al numeratore della frazione $\frac{a^{-n}}{1}$ che è eguale alla frazione $\frac{1}{a^n}$ in cui a^n ftà al denominatore; or quefta oppofizione di fito, che paffa trallo ftare al numeratore, e lo ftare al denominatore d'una frazione, viene acconciamente difegnata dal fegno dell'efponente, che in un cafo è $+$, e nell'altro $-$. Vedi Fontenelle (*Geom. de l'infini n.* 480.)

Calcolo nelle frazioni.

33. Rappresentando due qualunque fra zioni con $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, fi avranno le feguenti formole.

Addizione. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$

Sottrazione. $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$

Multiplicazione. $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

Divifione. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$

34. Efitano alcuni fulla regola per la divifione; ecco come fi dimoftra. Suppongo che multiplicando i termini d'una frazione per una fteffa quantità, non fi muta il valore della frazione; così $\frac{1}{2}$ è eguale a $\frac{2}{4}$, cioè a $\frac{1 \times 2}{2 \times 2}$; Suppongo innoltre che la vera efpreffione del quoto di due quantità fia una frazione che ha il dividendo per numeratore, ed il divifore per denominatore; Or dico, che per dividere una frazione per un'altra, fi devono rovefciare i termini del divifore, e multiplicare il dividendo, per il divifore così ridotto; cioè che

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Imperciocchè $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$, e multiplicando i termini di quest' ultima frazione per il prodotto de' denominatori delle date, cioè per bd, si ha $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{abd}{b}}{\frac{bcd}{d}} = \frac{ad}{bc}$.

Calcolo delle frazioni per mezzo degli esponenti.

35. S'E' già notato (num. 32.) che il segno $-$, messo avanti l'esponente d'una quantità qualunque dinota opposizione di sito, cioè che la data quantità fatta d'esponente positivo appartiene a quel termine della frazione, che è opposto al termine, in cui trovasi essa collocata; giusta la natura del segno $-$, che indica sempre qualche opposizione, o contrarietà, a differenza del $+$, che nell'uso dinota talvolta una semplice posizione d'una quantità; quindi $\frac{a^m}{a^n} = a^m \times a^{-n}$

$$\frac{a^m}{a^{-n}} = a^m \times a^n$$

36. Quindi si ha un metodo per calcolare la quantità intere a modo di frazioni, e le frazioni a modo delle quantità intere; ma per fermarci solamente nelle frazioni, si ha.

Addizione. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = ab^{-1} + cd^{-1}$

Sottrazione. $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = ab^{-1} - cd^{-1}$

Multiplicazione. $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = ab^{-1} \times cd^{-1}$

Divisione. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = ab^{-1} : cd^{-1}$

37. Quindi si ha un' elegante dimostrazione delle ordinarie regole per la multiplicazione e divisione nelle frazioni.

1.° $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$; dacchè $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = ab^{-1} \times cd^{-1} = acb^{-1}d^{-1} = \frac{ac}{bd}$. 2.° $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$; dacchè $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = ab^{-1} : cd^{-1} = \frac{ab^{-1}}{cd^{-1}} = \frac{ad}{bc}$.

Estrazione delle radici dalle quantità Algebraiche.

38. DAto il prodotto d'una quantità sconosciuta qualunque, e continuatamente multiplicata per se stessa un dato numero di volte; trovare la quantità multiplicata. Il dato prodotto si chiama *potenza* della quantità che si cerca; la quantità che si cerca si chiama *radice* della potenza il dato numero di volte per cui s'è fatta la multiplicazione, si chiama *esponente* del grado della potenza, e della radice. Rappresentando per a qualunque quantità complessa, o incomplessa, intera, o rotta, sarà $a \times a$ la seconda potenza di a, ed a la radice seconda di $a \times a$; $a \times a \times a$ sarà la terza potenza di a, ed a la radice terza di $a \times a \times a$ . . . ec.

39. La soluzione del presente problema di trovare, od estrarre la radice da una data potenza, non ha difficoltà alcuna per le quantità incomplesse; è evidente 1.° Che la potenza d'una quantità incomplessa è il prodotto delle potenze de' suoi fattori; la seconda potenza di bc, è $bc \times bc = b^2 c^2$, e ciò torna allo stesso che moltiplicare per l'esponente della potenza cercata l'esponente di ciascun fattore della quantità data; per converso adunque ad estrarre la radice d'esponente dato da una potenza incom-

complessa, si dovrà dividere l'esponente di ciascun fattore per l'esponente della radice cercata; così la radice seconda di $b^2 c^2$, è $b^{\frac{2}{2}} c^{\frac{2}{2}} = bc$.

E' evidente in 2.° luogo che le potenze d'esponente pari d'una quantità negativa, e le potenze di esponente pari o impari d'una quantità positiva sono sempre positive; e che le potenze d'esponente impari d'una quantità negativa sono sempre negative; quindi per converso le radici d'esponente impari d'una potenza negativa sono negative; le radici d'esponente impari d'una potenza positiva sono positive; le radici d'esponente pari d'una potenza positiva sono e positive e negative; e le radici d'esponente pari d'una potenza negativa non sono nè positive, nè negative, cioè sono immaginarie, ovvero impossibili.

Finalmente 3.° quanto a' coeficienti; se i coeficienti delle date potenze incomplesse di grado n non sono composti più di un numero n di figure, cercando tralle potenze delle semplici figure aritmetiche il coeficiente della data quantità, si troverà senza pena la sua radice; serve a ciò la Tavola prima delle potenze de' numeri semplici. Se i coeficienti delle date potenze incomplesse sono composti di più figure che non sono unità in n, si dovrà cercare la loro radice coi metodi delle potenze complesse.

Cercando la radice seconda di $36\, b^4 c^4$, si avrà 1.° $b^{\frac{4}{2}} c^{\frac{4}{2}} = b^2 c^2$; 2.° La radice seconda di 36 è 6; il segno è $\pm$; cioè disegnando col segno $\sqrt{\ }$ la radice seconda cercata; si avrà $\sqrt[2]{36\, b^4 c^4} = \pm 6\, b^2 c^2$.

40. L'estrazione delle radici nelle quantità complesse si deduce dalla formazione delle potenze nelle quantità medesime; bastano però a servire di formole le potenze d'un binomio qualunque rappresentato per $a+b$. Si multiplichi $a+b$ per se stesso, e si avrà la seconda potenza di $a+b$; si multiplichi la seconda po-

VOLA PRIMA. Pag. 24.

Delle potenze de' numeri semplici.

TAVOLA PRIMA.

Delle potenze de' numeri ſemplici.

Radice, o lato ſemplice.	Quadrato, o ſeconda potenza. Eſpon. (2)	Cubo, o terza potenza. eſpon. (3)	Quadrato quadrato, o quarta potenza. eſpon. (4)	Surſolido, o quinta potenza. eſpon. (5)	Quadrato cubo, o cubo-quadrato, ſeſta potenza. eſpon. (6)	Secondo ſurſolido, o ſettima potenza. eſpon. (7)	Biquadrato quadrato, o ottava potenza. eſpon. (8)	Cubo cubo, o nona potenza, ec. eſpon. (9)
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64	128	256	512
3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125
6	36	216	1206	7776	46656	279936	1679616	10077696
7	49	34[illegible]	2401	16807	117649	823543	5764801	40353607
8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216	134217728
9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721	387420489

TAVOLA SECONDA.

Delle potenze del binomio $a + b$.

$1^a + 0$

$1^a + 1 \quad b$ prima potenza, o radice.

$a^2 + 2a\,b + b^2$ 2ª pot.ª

$a^3 + 3a^2 b + 3a\,b^2 + b^3$ 3ª pot.ª

$a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4a\,b^3 + b^4$ 4ª pot.ª

$a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5a\,b^4 + b^5$ 5ª pot.ª

$a^6 + 6a^5 b + 15a^4 b^2 + 20a^3 b^3 + 15a^2 b^4 + 6a\,b^5 + b^6$ 6ª pot.ª

$a^7 + 7a^6 b + 21a^5 b^2 + 35a^4 b^3 + 35a^3 b^4 + 21a^2 b^5 + 7a\,b^6 + b^7$ 7ª pot.ª

$a^8 + 8a^7 b + 28a^6 b^2 + 56a^5 b^3 + 70a^4 b^4 + 56a^3 b^5 + 28a^2 b^6 + 8a\,b^7 + b^8$ 8ª pot.ª

$a^9 + 9a^8 b + 36a^7 b^2 + 84a^6 b^3 + 126a^5 b^4 + 126a^4 b^5 + 84a^3 b^6 + 36a^2 b^7 + 9a\,b^8 + b^9$ 9ª pot.ª

$a^{10} + 10a^9 b + 45a^8 b^2 + 120a^7 b^3 + 210a^6 b^4 + 252a^5 b^5 + 210a^4 b^6 + 120a^3 b^7 + 45a^2 b^8 + 10\,a b^9 + b^{10}$ 10ª pot.ª potenza di $a+b$ per la sua radice, e si avrà la terza potenza di $a+b$... come nella tavola seconda. Per vedere l'uso di queste formole per l'estrazione delle radici, sia meglio applicarle ad un esempio.

Si cerchi la radice seconda di $x^2+2bx+2ix+2bi+b^2+i^2$ ordinata per x. La seconda potenza di $a+b$ è $a^2+2ab+b^2$; discorro così: 1.° Per avere la prima parte della radice di questa formola, che altronde so essere a, basta estrarre la radice seconda dal primo termine a^2 della formola medesima, ordinata per a; essendo $\sqrt{a^2}=a^{\frac{2}{2}}=a$; dunque per avere la prima parte della radice cercata, che è rappresentabile per a, basterà estrarre la radice seconda dal primo termine x^2, e si avrà x. 2.° Per avere la seconda parte radicale b della formola, basta sottrarre dalla medesima il quadrato della prima parte a, e dividere il primo termine $2ab$ del ressiduo $2ab+b^2$, per il coeficiente di b, cioè per $2a$; dunque per avere la seconda parte radicale cercata, che è rappresentabile per b, si dovrà sottrarre dalla data quantità il quadrato x^2 della prima parte x già trovata, e dividere il primo termine $2bx$ del ressiduo $2bx+2ix+2bi+b^2+i^2$ per $2a$, cioè per $2x$; si avrà b. 3.° Sottraendo dal ressiduo della formola il prodotto di b, multiplicato per la somma del divisore, e della seconda parte radicale b, cioè sottraendo $(2a+b)b$, si ha zero per residuo; dunque se la radice della data potenza è binomia, sottraendo dal residuo predetto la quantità rappresentata per $(2a+b)b$, cioè $(2x+b)b$, si dovrà avere zero per residuo; ed avendo invece il residuo $2xi+2bi+i^2$, si ha un segno sicuro, che la radice cercata non è binomia, e che colle precedenti operazioni non si è avuta che una parte della radice cercata. 4.° E' però certo che questo residuo è minore della quantità data di tutto intero il quadrato di $x+b$; si può adunque contare d'avere solamente fin qui sminuita la data quantità del quadrato d'una sola parte della radice che si cerca; dunque chiamanmando *parte prima* la parte trovata $x+b$, ſi potrà eſſa diſegnare per l'a della formola, e per trovare l'altra parte b, ſi dovrà ricominciare dalla ſeconda operazione, cioè dal dividere il reſiduo $2ix+2bi+i^2$ per $2a$, oſſia per $2x+2b$, e l'i, che ſi ha dalla diviſione, ſarà una nuova parte radicale. Sottraendo, come prima, dal reſiduo medeſimo la quantità $(2a+b)b$, cioè $(2x+2b+i)i$, ſi ha zero per reſiduo, come nella formola; ciò è ſegno manifeſto, che la radice cercata è $x+b+i$.

41. Se non ſi foſſe avuto zero per reſiduo, ſi ſarebbe ripetuta l'ultima delle precedenti quattro operazioni, fino a che, o ſi aveſſe zero per reſiduo, o l'ultimo reſiduo non foſſe più diviſibile per $2a$: Nel primo caſo la quantità data ſarebbe potenza *perfetta*, e la radice trovata ſarebbe radice *finita*, o *razionale*; nel ſecondo la quantità data ſarebbe potenza *imperfetta*, e la radice trovata ſarebbe radice della maſſima potenza naſcoſta nella quantità data. Lo ſteſſo è il metodo per l'eſtrazione delle radici più alte di grado n, ed è manifeſto il modo d'applicare le formole alle intere quantità numeriche. Si ſepari, come è noto, il dato numero da deſtra a ſiniſtra in claſſi di figure n per ciaſcuna; ſi operi ſu queſte venendo da ſiniſtra verſo la deſtra, come ſu altrettanti termini d'una quantità compleſſa.

42. Per l'eſtrazione delle radici dalle frazioni, ſi rifletta, che il metodo univerſale per elevare ad una potenza qualunque una quantità data, applicato alle frazioni, ſi riduce ad alzare il numeratore, ed il denominatore della data frazione, alla potenza di grado dato; ciò fa conoſcere, che ad eſtrarre una radice di grado dato da una frazione, baſta l'eſtrarre la radice cercata da ciaſcuno de' termini della data frazione. Così $\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$

Cal-

Calcolo delle quantità radicali.

43. Dalle coſe dette al n. 39. sui ſegni da premetterſi alle radici incompleſſe è manifeſto, che ſi poſſono diſtinguere due generi di quantità radicali, cioè le quantità radicali *reali*, e le quantità radicali *immaginarie*; $\sqrt{4}$ è una quantità radicale reale; $\sqrt{-4}$ è immaginaria. Col metodo del n. 40. ſi può aſſegnare il valor vero di molte quantità radicali reali, come $\sqrt{4}=2$; ma d'un infinità d'altre quantità radicali reali, non ſi può conoſcere, che la radice della potenza maſſima, che vi ſta dentro come naſcoſta, e chiuſa; non ſi ſa la radice ſeconda di 5, ma la radice della maſſima potenza ſeconda, che ſta in 5 e 2; le quantità radicali reali delle quali ſi aſſegna il valor vero ſi chiamano *commenſurabili*; le altre quantità radicali reali ſi chiamano *incommenſurabili* o *ſorde*. Grande è il profitto che ſe ne trae nell'analiſi da queſte quantità radicali, o reali, o immaginarie, ſottomeſſe opportunamente alle leggi del calcolo; ſi diſegnan' eſſe col ſegno $\sqrt{}$, ſcrivendo alla ſiniſtra del medeſimo, l'eſponente della radice; $\sqrt[2]{a}$, o ſemplicemente $\sqrt{a}$, ſignifica la radice ſeconda di a; $\sqrt[3]{a}$ ſignifica la radice terza di a; $\sqrt[m]{a}$ ſignifica la radice di grado m di a.

44. Racchiudo nelle ſeguenti formole tutte le regole del calcolo, pe' radicali reali.

Addizione. $\frac{p}{q}\sqrt[m]{\frac{a}{b}} + \frac{r}{s}\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{ps+qr}{qs}\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$

Sottrazione. $\frac{p}{q}\sqrt[m]{\frac{a}{b}} - \frac{r}{s}\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{ps-qr}{qs}\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$

Multiplicazione. $\frac{p}{q}\sqrt[m]{\frac{a}{b}} \times \frac{r}{s}\sqrt[m]{\frac{c}{d}} = \frac{pr}{qs}\sqrt[m]{\frac{ac}{bd}}$

D 2

Diviſione. $\frac{p}{q}\sqrt[m]{\frac{a}{b}} : \frac{r}{s}\sqrt[m]{\frac{c}{d}} = \frac{ps}{qr}\sqrt[m]{\frac{ad}{bc}}$

Formaz.e delle potenze. $\left(\frac{p}{q}\sqrt[m]{\frac{a}{b}}\right)^{\frac{s}{v}} = \sqrt[\frac{mv}{s}]{\frac{p^m a}{q^m b}}$

Eſtrazione delle radici. $\sqrt[\frac{s}{v}]{\frac{p}{q}\sqrt[m]{\frac{a}{b}}} = \sqrt[\frac{ms}{v}]{\frac{p^m a}{q^m b}}$

45. Per la dimoſtrazione di queſte formole, conviene ſupporre, che, in vece di $\sqrt[m]{a}$ ſi può ſcrivere $a^{\frac{1}{m}}$; ciò diſcende naturalmente dal n. 39. Chi cerca la radice m di a, conſidera a come una perfetta potenza m d' una incognita quantità; quindi per le regole dimoſtrate al n. 39. ſi dovrà dividere l'eſponente di a per l'eſponente della radice cercata, e ſi avrà $\sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}}$. Da queſto principio ſi hanno le dimoſtrazioni delle formole precedenti; l'applico ad una ſola. Si cerca la radice di grado $\frac{s}{v}$ della quantità $\frac{p}{q}\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{p}{q}\times\frac{a^{\frac{1}{m}}}{b^{\frac{1}{m}}}$; ſi avrà $\sqrt[\frac{s}{v}]{\frac{p}{q}\times\frac{a^{\frac{1}{m}}}{b^{\frac{1}{m}}}}$

$$= \frac{p^{\frac{v}{s}}\, a^{\frac{v}{ms}}}{q^{\frac{v}{s}}\, b^{\frac{v}{ms}}} = \frac{p^{\frac{mv}{ms}}\, a^{\frac{v}{ms}}}{q^{\frac{mv}{ms}}\, b^{\frac{v}{ms}}} = \frac{p^{m:\frac{ms}{v}}\, a^{1:\frac{ms}{v}}}{q^{m:\frac{ms}{v}}\, b^{1:\frac{ms}{v}}} = \sqrt[\frac{ms}{v}]{\frac{p^m a}{q^m b}}$$

46. Per le quantità radicali compleſſe, miſte, o non miſte di quantità commenſurabili, o razionali come $a\ b\ldots$ ſi oſſervino le ſteſſiſſime leggi, che ſi ſono date per le quantità intere; per non imbarazzarſi nel decorſo del calcolo di tanti ſegni radicali, l'uno ſull' altro ammucchiati, e ſtretti inſieme, ſi ſoſtituiſcano nelle quan-

quantità date de' ſimboli interi, a, $b\ldots$ ec., e nel prodotto ſi rimetta il loro primo valore.

47. Anche le quantità immaginarie incompleſſe, e compleſſe, miſte, o no, di quantità reali ſoggiacciono alle ſteſſe regole del calcolo delle reali quantità. Si oſſervi però che le quantità che ſtanno ſotto il ſegno ſi poſſono ſempre conſiderare come quantità poſitive, ma multiplicate per -1; così $\sqrt{-a} = \sqrt{-1.a}$, e dalle formole del n. 44. $\sqrt{-1.a} = \sqrt{a} \times \sqrt{-1}$. Prima dunque di fare le conſuete operazioni del calcolo, o almeno quelle, che dipendono dalla multiplicazione, e dalla diviſione, ſi ſeparino, come nell'eſempio addotto, le quantità immaginarie, e ſi mantengano più che ſi può le $\sqrt{-1}$ anche ne' riſultati, finchè non vengano cancellate, o tolte da un altra $\sqrt{-1}$ introdotta nel calcolo da qualche multiplicazione, e diviſione.

Multiplicazione. $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = \sqrt{-1.a} \times \sqrt{-1.b}$ $= \sqrt{a}\,\sqrt{-1} \times \sqrt{b}\,\sqrt{-1} = \sqrt{a}\,\sqrt{b} \times \sqrt{-1}$ $= \sqrt{ab} \times -1 = -\sqrt{ab}$

Diviſione. $\sqrt{-a} : \sqrt{-b} = \sqrt{-.a} : \sqrt{-1.b} = \sqrt{a}\,\sqrt{-1}\ \sqrt{b}\,\sqrt{-1} = \frac{\sqrt{a}\,\sqrt{-1}}{\sqrt{b}\,\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$.

Per gli eſponenti. $\sqrt[n]{-a^m} = \sqrt[n]{-1.a^m} = \sqrt[n]{a^m}\sqrt[n]{-1}$ $= \sqrt[n]{a^m}\sqrt{-1} = a^{\frac{m}{n}}\sqrt{-1}$; ſi noti 1.o che n indica un numero pari; 2.o che a ragione ſi ſuppone $\sqrt{-1}\sqrt{-} = -1$; dacchè nell'eſpreſſione di $\sqrt{-1}$ ſi conſideri -1 come quadrato.

48. Si è ſempre ſuppoſto nelle precedenti formole che le quantità radicali date per la ſomma, e ſottrazione, abbiano quantità ſimili ſotto i ſegni, e che gli eſponenti de' ſegni radicali foſſero in tutte le operazioni ſempre gli ſteſſi in ciaſcuna dell date quantità. Quando le quantità, che ſtano ſotto i ſegni non foſſero ſimili, non ſi potrebbe fare altro che in-

indicare col +— la ſomma, o la ſottrazione cercata; ma quando gli eſponenti delle date quantità radicali foſſero diverſi, v'hanno acconcie regole per ridurgli allo ſteſſo eſponente; queſte appartengono alle riduzioni de' radicali, che noi per ultimo mettiam qui per riſtretto, anche ad eſercizio di calcolo.

Riduzioni nelle quantità radicali.

49. RIdurre una quantità radicale alla ſua più ſemplice forma.

Formola. $\sqrt[m]{\frac{a^m c}{b^m d}} = \frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{c}{d}}$.

Si cerchino tutti i diviſori della quantità, che ſta ſotto il ſegno; ſi eſtragga la radice m da quegli che ſono potenze perfette di m; ſi metta fuori del ſegno, a modo di coeficiente, il prodotto di queſte radici, ed il prodotto degli altri diviſori ſi laſci ſolo ſotto il ſegno.

Dim. $\sqrt[m]{\frac{a^m c}{b^m d}} = \frac{a^{\frac{m}{m}} c^{\frac{1}{m}}}{b^{\frac{m}{m}} d^{\frac{1}{m}}} = \frac{a}{b}\times\frac{c^{\frac{1}{m}}}{d^{\frac{1}{m}}} = \frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{c}{d}}$.

50. Ridurre una quantità qualunque ſotto qualunque ſegno radicale.

Formola. $\frac{a}{b} = \sqrt[m]{\frac{a^m}{b^m}}$.

Si alzi la quantità data alla potenza d'eſponente eguale all'eſponente del ſegno dato; ſi metta queſta potenza ſotto il dato eſponente.

Dim. $\frac{a}{b} = \frac{a^{\frac{m}{m}}}{b^{\frac{m}{m}}} = \sqrt[m]{\frac{a^m}{b^m}}$.

51. Ridurre una quantità qualunque ad un prodotto d'un numero qualunque m di quantità radicali. For-

Formola. $\frac{a}{b} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}\sqrt[m]{\frac{a}{b}}\sqrt[m]{\ }$ ... ec. m in numero.

Si ſcriva la quantità data ſotto il ſegno $\sqrt[m]{\ }$; ſi congiunga inſieme co' noti ſegni di multiplicazione un numero m di queſte quantità radicali.

Dim. Se $m = 4$; Sarà

$$\frac{a}{b} = \left(\sqrt[4]{\frac{a}{b}}\right)^4 = \sqrt[4]{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt[4]{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt[4]{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt[4]{\frac{a}{b}}.$$

52. Mettere fuori del ſegno qualunque quantità algebraica x di qualunque termine, per eſempio del primo, d'una data quantità radicale compleſſa.

Formola. $gx\sqrt[m]{ax+bx^n} = gx^{1+\frac{1}{m}}\sqrt[m]{a+bx^{n-1}}$.

Si cerchi la radice m della quantità x; per queſta radice ſi divida la quantità compleſſa, che ſta ſotto il ſegno, e ſi multiplichi il coeficiente del ſegno radicale.

Dim. $\sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{m}}$; dunque $gx\sqrt[m]{ax+bx^n} = gx\cdot x^{\frac{1}{m}}\frac{\sqrt[m]{ax+bx^n}}{\sqrt[m]{x}}$

$= gx^{1+\frac{1}{m}}\sqrt[m]{a+bx^{n-1}}$.

53. Mettere al numeratore d'una quantità, che ſta fuori del ſegno, qualunque quantità data.

Formola. $\frac{a}{o}\sqrt[m]{\frac{c}{d}} = \frac{a}{o}\cdot g\sqrt[m]{\frac{c}{dg^m}}$.

Si multiplichi per la data quantità il coeficiente del dato radicale; ſi alzi la medeſima quantità data alla potenza d'eſponente eguale all'eſponente del radicale dato, e per queſta potenza ſi divida la quantità, che ſta ſotto il ſegno.

Dim.

Dim. $\frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}\cdot g\cdot\frac{\sqrt[m]{\frac{c}{d}}}{\sqrt[m]{g^m}} = \frac{ag}{b}\sqrt[m]{\frac{c}{dg^m}}$.

54. Mettere al denominatore della quantità, che ſta fuori del ſegno, qualunque quantità data.

Formola. $\frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{c}{d}} = \frac{a}{bg}\sqrt[m]{\frac{cg^m}{d}}$.

Si divida il coeficiente del dato radicale per la quantità data; ſi alzi la medeſima quantità data alla potenza d'eſponente eguale all' eſponente del radicale dato, e per queſta potenza ſi moltiplichi la quantità, che ſta ſotto il ſegno del dato radicale.

Dim. $\frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}\cdot\frac{1}{g}\cdot g\sqrt[m]{\frac{c}{d}}$

$= \frac{a}{b}\cdot\frac{1}{g}\sqrt[m]{g^m}\sqrt[m]{\frac{c}{d}} = \frac{a}{bg}\sqrt[m]{\frac{cg^m}{d}}$.

55. Ridurre una data quantità radicale ad un ſegno d'eſponente n maggiore, o minore dell' eſponente dato m.

Formola. $\frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}\sqrt[n]{\frac{c^{\frac{n}{m}}}{d^{\frac{n}{m}}}}$.

Si divida l'eſponente del ſegno cercato per l'eſponente del ſegno dato; ſi alzi la quantità, che ſta ſotto il dato ſegno alla potenza d'eſponente eguale al quoto di queſta diviſione. Si metta queſta potenza ſotto il ſegno cercato preceduto dal coeficiente del ſegno dato.

Dim. $\frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}\cdot\frac{c^{\frac{1}{m}}}{d^{\frac{1}{m}}} = \frac{a}{b}\cdot\frac{c^{\frac{n}{mn}}}{d^{\frac{n}{mn}}} = \frac{a}{b}\sqrt[n]{\frac{c^{\frac{n}{m}}}{d^{\frac{n}{m}}}}$.

56. Ridurre ad una quantità intera la quantità rotta, che per avventura ſi trovi ſotto il ſegno d'una data quantità radicale.

Formola. $\frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{c}{d}} = \frac{a}{bd}\sqrt[m]{cd^{m-1}}$.

Si divida il coeficiente del dato radicale per il denominatore della frazione, che ſta ſotto il ſegno; ſi alzi il denominatore medeſimo alla potenza d'eſponente eguale all' eſponente del dato ſegno; per queſta potenza ſi multiplichi la frazione, che ſta ſotto il ſegno.

Dim. $\frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}\cdot\frac{c^{\frac{1}{m}}}{d^{\frac{1}{m}}} = \frac{a}{bd}\cdot\frac{c^{\frac{1}{m}}d^{\frac{m}{m}}}{d^{\frac{1}{m}}} = \frac{a}{bd}\sqrt[m]{\frac{cd^m}{d}}$

$= \frac{a}{bd}\sqrt[m]{cd^{m-1}}$.

57. Ridurre qualunque numero di quantità radicali al medeſimo ſegno.

Formola. $\left.\begin{array}{l} \overset{A.}{\frac{p}{q}\sqrt[m]{\frac{a}{b}}} \\ \frac{r}{s}\sqrt[n]{\frac{c}{d}} \end{array}\right\}\begin{array}{l} = \frac{p}{q}\sqrt[mn]{\frac{a^n}{b^n}}. \\ = \frac{r}{s}\sqrt[mn]{\frac{c^m}{d^m}}. \end{array}$

Si multiplichi l'eſponente di ciaſcun ſegno radicale A per il prodotto degli eſponenti degli altri ſegni; e ſi alzi la quantità, che ſta ſotto il ſegno A, alla potenza d'eſponente eguale a queſto ſteſſo prodotto.

Dim. $\frac{p}{q}\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{p}{q}\cdot\frac{a^{\frac{1}{m}}}{b^{\frac{1}{m}}} = \frac{p}{q}\cdot\frac{a^{\frac{n}{mn}}}{b^{\frac{n}{mn}}} = \frac{p}{q}\sqrt[mn]{\frac{a^n}{b^n}}$, e per la ſteſſa ragione $\frac{r}{s}\sqrt[n]{\frac{c}{d}} = \frac{r}{s}\sqrt[mn]{\frac{c^m}{d^m}}$.

58. Per la trasformazione del num. 49. è neceſſario ſapere trovare tutti i diviſori d'una data quantità. Egli è facile il trovare i diviſori incompleſſi, ſemplici, e compoſti d'una data quantità: Si divida la data quantità per la più piccola, o più ſemplice quantità, della quale ſi veda compoſto la data quantità X; Si divida il quoto X' per la medeſima quantità.... fino a che qualcuno de' quoti X'' non poſſa più dividerſi per l'aſſunto diviſore. Si divida X'' per la più ſemplice delle quantità componenti, e ſi ripeta la medeſima operazione ſu i nuovi quoti X''', fino a trovarne uno non diviſibile eſattamente, che per ſe ſteſſo. Si ſcrivano per ordine uno ſotto l'altro i quoti X', X'', X'''..... in una colonna A; in una ſeconda colonna B, vicina alla prima, ſi ſcrivano i prodotti de' diviſori preſi a due a due; in una terza colonna C ſi ſcrivano i prodotti de' diviſori preſi a tre a tre......, B conterrà i diviſori ſemplici; C, D.... conterrà i diviſori compoſti. Talvolta con queſto metodo ſi troveranno anche i diviſori compleſſi; Ma il trovargli tutti eſattamente, e per ordine, non è opera di leggiere fatica, e di piccole rifleſſioni; queſto problema lo riſervo ad un trattato particolare.

CAPO TERZO.

Uſo del Calcolo Algebraico nella ſoluzione delle equazioni.

Formazione delle equazioni.

59. Si chiama *Algebra*, o *Analiſi* l'arte di ſciogliere col calcolo algebraico, i problemi, che ſi propongono intorno a qualſivoglia ſpecie di quantità; e la prima operazione dell' Analiſta induſtre, è di denominare colle lettere dell' Alfabeto le quantità date, e le cercate, e di eſprimere con carattere algebraico le relazioni, che tra queſte paſſano, non altrimenti che i concetti della mente noſtra ſiamo uſi ad eſprimere con parole, proprie a quell' idioma, che a noi è comune, e familiare. Ciaſcuna condizione del problema dà un' equazione, e ſe tante ſono le condizioni, oſſia ſe tante in numero ſono le equazioni, quante ſono le quantità cercate, il problema ſi chiama *determinato*; ſe ſono meno, o più in numero l'equazioni che le quantità cercate, il problema ſi chiama *indeterminato o più che determinato*; per ciaſcuno di queſti caſi, ci ſono opportune regole, o per determinare eſattamente il valore delle quantità incognite contenute nelle equazioni, o per determinarlo proſſimamente al vero. Non è mia intenzione di ſtendere partitamente tutti i precetti dell' arte Analitica; Solamente eſporrò alcuni metodi più facili per trovare il valore dell' incognita, per cui ſia ordinata una data equazione, ſupponendo conoſciute tutte le altre quantità, che ne compongono i termini.

60. E in prima conviene ſapere quale ſia l'indole, e la natura delle radici d'una data equazione; volgiamoci per ciò al problema inverſo di cercare quale ſia la natura d' un' equazione, che ha per radici (o per valore dell' incognita) diverſe date quantità. Sia x l'incognita, e ſiano a, b, c, d.... i di-

versi valori di x; cosicchè sia $x = a$, $x = b$, $x = c$, ... ec. 1.° Si avrà $x - a = o$, $x - b = o$, $x - c = o$ ... ec.; questa è la fondamentale operazione dell' Analisi, chiamata *trasposizione*. Si conserva l' equazione tra i due membri (ciascuna delle quantità tra se eguali si chiama membro dell' equazione) d' una data equazione, se si tolga da un membro dell' equazione qualunque termine, e si metta nell' altro membro col segno contrario, scrivendo un zero al luogo del primo; ciò non è altro, che aggiungere, o sottrarre da amendue i membri d' un' equazione una stessa quantità; se $x = a$, sottraendo da amendue i membri la quantità a, si ha $x - a = a - a$, cioè $x - a = o$. 2.° Ciascuna di quelle equazioni $x - a = o$, $x - b = o$, ... si chiama equazione di primo grado; dacchè l' x non si trova in grado più elevato del primo; il prodotto di due di quelle equazioni $(x - a = o)$ $(x - b = o)$ si chiama equazione di secondo grado, dacchè, fatta la multiplicazione, l' x si trova alzata al secondo grado, cioè alla seconda potenza; ed in generale, il grado dell' equazione è sempre eguale all' esponente massimo dell' incognita. Si noti che aggiungere un' equazione ad un' altra, sottrarre un' equazione da un' altra, multiplicare, dividere un' equazione per un' altra .... significa aggiungere ciascun membro d' un' equazione al membro corrispondente dell' altra ... ec. 3.° Quindi ciascuna equazione si può concepire come composta di tante equazioni di primo grado, quante sono le unità nell' esponente del suo grado. Le equazioni però di grado più elevato si possono concepire formate dalla multiplicazione d' altre equazioni di grado inferiore, e più elevato del primo; quelle di quarto grado possono essere formate da due del secondo, quelle del sesto da tre del secondo, o da due del terzo ... ec. 4.° Data una delle componenti, si può abbassare di grado la composta, dividendo questa per la sua componente, e se il grado della composta è m, ed il grado della componente è n, il grado della ridotta sarà $m - n$.

61. Fat-

61. Fatte le multiplicazioni accennate delle equazioni di primo grado, si ha grado

$$
\begin{array}{lllllll}
\text{I.} \;\ldots\; x & -a = o & & & & & \\
\text{II.} \;\ldots\; x^2 & -ax & +ab = o & & & & \\
 & -bx & & & & & \\
\text{III.} \ldots\; x^3 & -ax^2 & +abx & -abc = o & & & \\
 & -bx^2 & +acx & & & & \\
 & -cx^2 & +bcx & & & & \\
\text{IV.} \ldots\; x^4 & -ax^3 & +abx^2 & -abcx & +abcd = o & & \\
 & -bx^3 & +acx^2 & -abdx & & & \\
 & -cx^3 & +bcx^2 & -acdx & & & \\
 & -dx^3 & +adx^2 & -bcdx & & & \\
 & & +bdx^2 & & & & \\
 & & +cdx^2 & & & & \\
\text{V.} \;\ldots\; \text{ec.} & & & & & &
\end{array}
$$

Numero, e qualità delle radici reali.

62. DAll' attenta considerazione di queste, e d' altre simili formole fatte colle radici negative, o miste, si vede manifestamente. 1.° Che qualunque equazione ha tante radici nè più nè meno, quante sono le unità dell' esponente del suo grado. 2.° Che il coeficiente del secondo termine, o a dire meglio, della incognita che lo distingue, contiene la somma di tutte le radici; il coeficiente del terzo termine contiene tutti i prodotti delle radici prese a due a due; il coeficiente del terzo termine contiene tutti i prodotti delle radici a tre a tre......, e l' ultimo termine contiene il prodotto di tutte le radici prese insieme. 3.° Ne' termini pari, le radici stanno multiplicate in numero impari; ne' termini impari, stanno multiplicate in numero pari. 4.° Se tutte le radici sono negative, i termini dell' equazione sono tutti positivi; se tutte le radici sono positive, i ter-

termini dell' equazione ſono alternativamente poſitivi, e negativi; ſe ſono miſte di radici poſitive, e negative, non è mai continuata l'alternazione de' ſegni, e talvolta manca qualche termine; di più tante ſono le radici poſitive, quante ſono le alternazioni de' ſegni $+-$; e tante ſono le radici negative, quante ſono le *conſecuzioni* dello ſteſſo ſegno ne' termini dell' equazione. 5.° Se la ſomma delle radici poſitive è eguale alla ſomma delle negative, manca il ſecondo termine dell' equazione, o ſi fa eguale a zero; ſe la ſomma delle radici poſitive ſupera la ſomma delle negative, il ſecondo termine dell' equazione è negativo; ſe la ſomma delle poſitive è minore delle negative, il ſecondo termine è poſitivo. 6.° Se il numero delle radici poſitive è pari, l'ultimo termine dell' equazione è poſitivo, ſe impari è negativo. 7.° Se ſi cambino i ſegni de' termini ſolamente pari, o ſolamente impari d'un' equazione tutte le radici ſi cambiano di poſitive in negative, e di negative in poſitive. 8.° Se invece d'x, e delle ſue potenze ſi ſoſtituiſca in un' equazione il valore dell' incognita, la ſomma de' termini dell' equazione ſarà eguale a zero. Queſte proprietà delle radici ſi poſſono quaſi tutte dimoſtrare *a priori* dalle regole de' ſegni $+-$; baſti per noi l'induzione. Si noti, che le propoſizioni inverſe delle otto precedenti ſono vere in ogni caſo.

Numero, e qualità delle radici imaginarie.

63. DAl calcolo delle quantità imaginarie è manifeſto, che il loro prodotto, ſolamente allora è reale, quando ſono pari in numero le imaginarie quantità in ſieme multiplicate; ſi vede di più che per togliere da un polinomio $x-a-\sqrt{-b}$ il ſegno radicale, non v'è altro mezzo, che multiplicare il dato polinomio per un altro, che non differiſca dal primo, che nel ſegno prefiſſo al termine imaginario, cioè per $x-a+\sqrt{-b}$.

64. For-

64. Formando ſu queſti due principj l'equazioni compoſte da altre equazioni imaginarie di primo grado ſi vedrà: 1.° Che ſe v'hanno radici imaginarie in un' equazione, eſſe ſono ſempre pari in numero. 2.° Che ſotto il ſegno radicale di ciaſcun binario di radici imaginarie vi ſta ſempre la medeſima quantità, ſoltanto diverſa nel $+$, o $-$ che precede il ſegno $\sqrt{}$. 3.° Che qualunque equazione di grado impari, ha almeno una radice reale. 4.° Che nelle equazioni di grado pari, v'ha ſempre una radice reale, quando l'ultimo termine, cioè il termine coſtante è negativo. 5.° Nelle equazioni di terzo e quarto grado, ſe manca il ſecondo termine, ed il terzo ſia poſitivo, v'hanno ſempre delle radici imaginarie.

65. Il problema più difficile intorno alle radici imaginarie delle equazioni, è di ſapere il loro numero prima d'applicarvi i metodi per ſcioglierle. Newton ha eſpoſto per ciò un metodo aſſai elegante nella ſua Aritmetica univerſale; lo ha dimoſtrato il Sig. Giorgio Campbell, e nel dimoſtrarlo ci ha fatti avveduti che era difettoſo in molti caſi.

Eſpongo qui il metodo, che a quello del Newton v'ha ſoſtituito del ſuo il citato Autore. Sia m il grado dell' equazione; dalla tavola delle potenze di $a+b$ ſi prendano i coeficienti A della potenza m, ommeſſi gli eſtremi; ſi ſminuiſca ciaſcun coeficiente di un unità, ſi avrà A'; ſi divida ciaſcun termine di A' per il doppio termine corriſpondente di A; e le frazioni B, o B' quindi nate, ſi ſcrivano per ordine ſopra i termini della data equazione, ommeſſi gli eſtremi. Sia n qualunque termine della data equazione; n' la frazione ſovrappoſta; a, b, c... ec. i termini, che vengono verſo la deſtra del termine n; a', b', c', d' ... i termini che gli vengono verſo la ſiniſtra. Ciò poſto: Se $n'n^2$ ſarà maggiore di $a'a-b'b+c'c-d'd+e'e-f'f$.... ec. $=C$, ſi ſcriva il ſegno $+$ ſotto n; ſe $n'n^2$ ſarà minore di C, ſi ſcriva il ſegno $-$ ſotto n; e ſotto il primo e l'ultimo termine dell' equazione

zione

zione ſi metta il ſegno $+$: Saranno tante le radici imaginarie nella data equazione, quante ſi troveranno alternaztoni di $+$ in $-$ ne' ſegni ſottopoſti. Fin qui l'Autore; io non ho fatto altro che mettere il teorema ſotto forma più comoda, e più piana, introducendo le denominazioni di n, n'.... Applico il metodo ad un eſempio. Sia l'equazione $x^7 - 5x^6 + 15x^5 - 23x^4 + 18x^3 + 10x^2 - 28x + 24 = 0$ di grado ſettimo. Siano A i coeficienti della ſettima potenza di $a+b$, ommeſſi gli eſtremi; ſottraendo l'unità da ciaſcun termine di A, ſi avrà A'; dividendo ciaſcun termine di A' per il doppio de' termini corriſpondenti di A, ſi avrà B, cioè B'

$$A \ldots\ 7.\ 21.\ 35.\ 35.\ 21.\ 7.\quad B \ldots \frac{6}{14}.\ \frac{20}{42}.\ \frac{34}{70}.\ \frac{34}{70}.\ \frac{20}{42}.\ \frac{6}{14};$$

$$A' \ldots\ 6.\ 20.\ 34.\ 34.\ 20.\ 6.\quad B' \ldots \frac{3}{7}.\ \frac{10}{21}.\ \frac{17}{35}.\ \frac{17}{35}.\ \frac{10}{21}.\ \frac{3}{7};$$

Si diſpongono queſte frazioni ſopra i termini della data equazione, ommeſſi gli eſtremi, ſi avrà

$$\begin{array}{cccccccc} & \frac{3}{7} & \frac{10}{21} & \frac{17}{35} & \frac{17}{35} & \frac{10}{21} & \frac{3}{7} & \\ x^7 & -\,5x^6 & +\,15x^5 & -\,23x^4 & +\,18x^3 & +\,10x^2 & -\,28x & +\,24 = 0 \\ + & - & + & - & + & - & + & + \end{array}$$

per il termine $5x^6$ ſi ha $n'n^2 = \frac{75}{7}x^{12}$, e $C = 15x^{12}$

per il termine $15x^5$ ſi ha $n'n^2 = \frac{750}{7}x^{10}$, e $C = 97x^{10}$

per il termine $23x^4$ ſi ha $n'n^2 = \frac{8993}{35}x^8$, e $C = 292x^8$

per il termine $18x^3$ ſi ha $n'n^2 = \frac{5508}{35}x^6$, e $C = 70x^6$

per il termine $10x^2$ ſi ha $n'n^2 = \frac{1000}{21}x^4$, e $C = 48x^4$

per il termine $28x$ ſi ha $n'n^2 = \frac{336}{1}x^2$, e $C = 24x^2$

e mettendo ſotto ciaſcun termine dell' equazione i ſegni opportuni, ſi hanno ſei mutazioni, o variazioni de' Segni, cioè l'equazione data contiene ſei radici imaginarie. Colla regola del Newton non ſe ne troverebbero che due.

Traſformazioni delle equazioni.

66. L'Artificio più univerſale, e più ſpedito per trovare le radici d'una data equazione è di traſformare l'equazione data in un' altra più ſemplice, per paſſare quindi dalle radici della traſformata alle radici della propoſta. L'uſo del calcolo, e la pronta penetrazione dell' Analiſta ſuggeriſce nelle particolari circoſtanze la più acconcia legge, con cui ſi deve traſformare la propoſta equazione; qualunque però ſia la legge della traſformazione. 1.° Si prenda ad arbitrio un' incognita y diverſa dall' incognita x, per cui è ordinata l'equazione propoſta; queſt' y rappreſenterà qualunque radice della traſformata. 2.° Si eſprima con un' equazione tra x ed y la legge della cercata traſformazione. 3.° Si ricavi da queſta equazione *auſiliare* il valore di x, da ſoſtituirſi nella data equazione. Comunemente parlando, non fa biſogno per trovare l'x dell' equazione auſiliare, che delle più volgari operazioni del calcolo, e de' ſempliciſſimi teoremi, che da queſte ſi deducono; a cagione d'eſempio, che un quoto multiplicato pel diviſore è eguale al dividendo; che un prodotto diviſo per uno de' ſuoi fattori è eguale al prodotto degli altri fattori.... ec.

67. Eſempj di traſformazioni. 1.° Aumentare le radici x della propoſta, d'una data quantità m; ſi ha $x + m = y$, cioè $x = y - m$ da ſoſtituirſi nella propoſta. 2.° Sminuire le radici x d'una data quantità m; ſarà $x - m = y$, cioè $x = y + m$. 3.° Sottrarre ciaſcuna radice x dalla quantità m; ſarà $m - x = y$, cioè $x = m - y$. 4.° Multiplicare le radici x colla quantità m; ſarà $mx = y$, cioè $x = \frac{y}{m}$. 5.° Dividere le radici x per la quantità m;

 ſarà

ſarà $\frac{x}{m} = y$, cioè $x = my$. *6.º* Dividere una quantità m per ciaſcuna radice x; ſarà $\frac{m}{x} = y$, cioè $x = \frac{m}{y}$.

Se le radici della traſformata vogliansi eguali

$$\text{a } \sqrt[m]{x},\ \text{ſarà } x = y^m$$

$$\text{a } \sqrt[m]{fx},\ \text{ſarà } x = \frac{y^m}{f}$$

$$\text{ad } \frac{f^m}{x},\ \text{ſarà } x = \frac{f^m}{y}$$

$$\text{ad } \frac{xf^m}{g^n},\ \text{ſarà } x = \frac{g^n y}{f^m}$$

.... ec.

E' evidente, che ſoſtituendo le radici della traſformata in queſte equazioni auſiliarie, ſi avranno le radici x della propoſta; e facendo varj eſempj di traſformazioni, ſi vedrà. 1.º Che per multiplicare le radici x con m, baſta ſoſtituire y invece d'x nella data equazione, e multiplicare il ſecondo termine della nuova equazione per m, il terzo per m^2, il quarto per m^3, l'n^{esimo} per m^{n-1}. 2.º Che per dividere le radici x per m, baſta ſoſtituire y invece d'x nella propoſta, e dividere il ſecondo termine della nuova equazione per m, il terzo per m^2, il quarto per m^3, l'n^{esimo} per m^{n-1}. 3.º Che, ſe l'equazione propoſta ha alcune radici imaginarie, qualunque traſformata conterrà le imaginarie medeſime. 4.º Se la propoſta ha delle radici poſitive e negative, e ſi aumentino le radici d'una quantità m, le radici poſitive ſi aumenteranno, e ſi ſminuiranno le negative nella traſformata. 5.º Se la propoſta ha delle radici poſitive e negative, e la quantità m, di cui ſi aumentino le radici della propoſta ſia eguale ad una delle radici negative, queſta ſarà eguale a zero nella traſformata; la traſformata innoltre avrà l'ultimo termine eguale a zero, e ſi potrà abbaſſare d'un grado, dividendola per y. *6.º* Nella ſteſſa ſuppoſizione, ſe m ſarà maggiore di qualunque delle radici negative della propoſta, le radici negative della propoſta così accreſciute, ſaranno le poſitive della traſformata, e la minima radice poſitiva della traſformata naſcerà dalla maſſima negativa della propoſta. 7.º Se la propoſta ha delle radici poſitive, e negative, e la quantità m, di cui ſi vogliano ſcemate le radici della propoſta, ſia eguale ad una, o maggiore di ciaſcuna radice poſitiva della propoſta, o mancherà l'ultimo termine nella traſformata, o le poſitive della propoſta ſminuite di m ſaranno le radici negative della traſformata. E' facile il vedere le propoſizioni inverſe delle precedenti, la loro dimoſtrazione dalle regole de' ſegni, e dal num. 62., ed i corollari, che ſi poſſono dedurre da ciaſcuna.

Uſo delle traſformazioni.

68. TRovare il valore della quantità m, che aggiunta alle radici della propoſta, faccia ſvanire un dato termine nella traſformata.

Se il ſecondo termine della propoſta ha $+$ ſi aumenti, e ſe ha $-$ ſi ſminuiſca ciaſcuna radice della propoſta, della quantità m ſuppoſta nota; ſi faccia eguale a zero il coeficiente del termine della traſformata, che corriſponde al termine, che ſi vuol togliere; il valore di m dedotto da queſta equazione ſarà la quantità cercata. Sia la propoſta $A \ldots\ z^3 - 2sz^2 + vz - t^2 = 0$. Si ſupponga

$$+ s^2 z$$

$z - m = y$, cioè $z = y + m$; Sarà

$$z = y + m$$

$$z^2 = y^2 + 2my + m^2$$

$$z^3 = y^3 + 3my^2 + 3m^2 y + m^3$$

d'onde nella propoſta ſarà $z^3 = y^3 + 3my^2 + 3m^2 y + m^3$

$$\begin{array}{lcl} -2sz^2 & = & -2sy^2-4msy-2sm^2 \\ +vz & = & \qquad\quad +vy+mv \\ +s^2z & = & \qquad\quad +s^2y+ms^2 \\ -t^2 & = & \qquad\qquad\quad -t^2 \end{array}$$

cioè invece di A ſi avrà B....
$$\begin{array}{rrrr} y^3+3my^2 & +3m^2y & +m^3 & =0 \\ -2sy^2 & -4msy & -2m^2s & \\ & +vy & +mv & \\ & +s^2y & +ms^2 & \\ & & -t^2 & \end{array}$$

Se ſi voglia, che nella trasformata di A manchi il ſecondo termine, ſi ſupponga il coeficiente di y^2, in B, eguale a zero, cioè $3m-2s=0$, ed $m=\frac{2s}{3}$ ſarà la quantità da ſoſtituirſi in B per avere la cercata trasformata. Se ſi voglia, che nella trasformata di A manchi il terzo termine, ſi ſupponga il coeficiente di y in B eguale a zero; e ſe ſi voglia togliere il quarto termine, ſi ſupponga il coeficiente di y^0, cioè l'ultimo termine di B, eguale a zero. Si vede in generale, che per fare ſvanire nella trasformata il termine che corriſponde all'n *eſimo* della propoſta, conviene ſciogliere un' equazione di grado $(n-1)$ *eſimo*.

69. Trovare una quantità m, che aggiunta alle radici della propoſta, faccia eguale ad a il coeficiente d'un dato termine n *eſimo* della trasformata.

Si operi come nel problema precedente; ma il coeficiente del termine n *eſimo* in B ſi dovrà ſupporre eguale ad a, e non a zero.

70. Mettere nella trasformata i termini, che mancano nella propoſta.

Si aumentino, o ſi ſminuiſcano, come al num. 68. d'una qualunque quantità a le radici della propoſta.

71. Mettere nella trasformata i termini, che mancano nella propoſta, ed elevare la trasformata ad un grado qualunque più elevato del grado della propoſta.

Si multiplichi la propoſta per x tante volte, finchè la trasformata ſia di grado cercato; ſi operi ſull'equazione così ridotta come al num. 70.

72. Se il primo termine della propoſta ha un coeficiente a diverſo dall' unità, trasformarla in un' altra, il cui primo termine abbia l'unità per coeficiente.

Si multiplichino le radici della propoſta per a; oppure ſi divida ciaſcun termine della propoſta per a.

73. Se il primo termine della propoſta ha per coeficiente l'unità, ed i coeficienti d'uno, o più altri termini ſieno frazionari, trasformarla in un' altra, che non abbia frazioni per coeficienti degli altri termini, e mantenga l'unità per coeficiente del primo termine.

Si multiplichino le radici della propoſta per il prodotto de' denominatori di tutti i termini.

74. Trasformare la propoſta in un' altra, in modo, che la radice maſſima della propoſta ſia la minima della trasformata, e la minima della propoſta ſia la maſſima della trasformata.

Si ſupponga $x=\frac{1}{y}$, e fatte come ſopra le ſoſtituzioni, ſi multiplichi ciaſcun termine della trasformata per il prodotto de' denominatori della medeſima.

75. Se le radici della propoſta ſiano parte poſitive, parte negative, trasformarla in un'altra, le di cui radici ſiano tutte poſitive.

Si muti il ſegno al maſſimo coeficiente negativo della propoſta; da queſto, aumentato d'un' unità, ſi ſottraggano le radici della propoſta. Sia $x^2-2x-3=0$; il maſſimo coeficiente negativo è -3; mutando il ſegno a queſto coeficiente ſi ha 3; ſi faccia $3+1-x=y$, cioè $4-x=y$, oſſia $4-y=x$; d'onde $x^2=16-8y+y^2$, e la propoſta ſi cambierà in
$$\begin{array}{l} y^2-8y+16=0 \\ +2y-8 \\ \qquad -3 \end{array}$$
cioè in $y^2-6y+5=0$, che per l'alternazione de' ſegni, ha tutte le ſue radici poſitive.

76. Togliere gli incommenſurabili coeficienti $\sqrt{n}$, che per avventura ſi trovino ne' termini pari della propoſta.

Si multiplichino le radici della propoſta per $\sqrt{n}$.

77. Se

77. Se ſi trovi nel coeficiente del ſecondo termine della propoſta $\sqrt[3]{n^2}$, nel coeficiente del terzo termine $\sqrt[3]{n}$, neſſun incommenſurabile al quarto termine, $\sqrt[3]{n^2}$ al quinto, $\sqrt[3]{n}$ al ſeſto, neſſuno al ſettimo, e così ſucceſſivamente, baſta ſupporre $x = \frac{y}{\sqrt[3]{n}}$, e ſvaniranno i radicali di terzo grado da qualunque data equazione. Se non vi foſſe queſt' ordine ne' radicali coeficienti d'un' equazione, è manifeſto che colla preſente trasformazione, che è la quarta del num. 67. non ſvanirebbero i radicali. Lo ſteſſo metodo può ſervire in caſi ſimili per le $\sqrt[4]{n}$, e per le $\sqrt[m]{n}$.

78. E' troppo importante il ſapere togliere i coeficienti radicali da una propoſta equazione per non dovere qui ommettere un metodo generale per le radicali d'ogni grado, comunque diſpoſte ne' termini dell' equazione medeſima. 1.º Si laſci ſola in un membro dell' equazione la quantità radicale, che ſi vuol togliere dall' equazione; ciò ſi fa col traſporre nell' altro membro tutte le altre quantità: Si alzi ciaſcun membro dell' equazione alla potenza d'eſponente eguale all' eſponente del radicale medeſimo. 2.º Se dopo queſta operazione ſi trovi nel ſecondo membro qualch' altra quantità radicale, ſi operi ſu queſta come ſulla prima, e così nel reſto. Si abbrevierà il calcolo (come al num. 46.) col ſoſtituire prima di tutto, o dopo ciaſcuna operazione una nuova lettera invece delle quantità già divenute commenſurabili, riſervandoſi a rimettere nell' equazione il valore, o i valori di queſte lettere introdotte, dopo finite tutte le operazioni ſulle quantità radicali.

Sia

Sia $x + \sqrt[3]{a^2x} = \sqrt{ax}$; ſi faccia $n = \sqrt[3]{a^2x}$

$$m = \sqrt{ax}$$

ed invece dell' equazione data ſi avrà $x + n = m$; d'onde $n = m - x$, ed elevando alla terza potenza ciaſcun membro ſi avrà $n^3 = m^3 - 3m^2x + 3mx^2 - x^3$, oſſia $n^3 + 3m^2x + x^3 = m^3 + 3mx^2$; in queſt' ultima equazione ſi ſuppongano le quantità commenſurabili $n^3 + 3m^2x + x^3$ eguali ad f^3, e ſi alzi, a cagione dell' $m = \sqrt{ax}$, ciaſcun membro dell' equazione $m^3 + 3mx^2 = f^3$ alla ſeconda potenza; ſi avrà $m^6 + 6m^4x^2 + 9m^2x^4 = f^6$, che non conterrà più incommenſurabile alcuna, dopo la ſoſtituzione de' valori di f, m, n.

79. Queſti ed altri ſimili ſono gli uſi delle trasformazioni delle equazioni, tutti neceſſarj per diſporre l'equazione, che ſi ha da un problema a farci conoſcere i valori dell' incognita, per cui è ordinata. La più uſuale tralle addotte trasformazioni è quella del num. 68. applicata a togliere il ſecondo termine d'una data equazione; la trasformazione del num. 78. ſerve per conoſcere il grado vero d'una data equazione.

Analiſi delle equazioni di primo grado.

80. DAlle coſe fin qui dette è manifeſto, che per non turbare l'eguaglianza che paſſa trai due membri d'un' equazione ſi devono fare in un membro le operazioni ſteſſe, che ſi fanno nell' altro; come ſarebbe aggiungere ad amendue i membri, o ſottrarre da' medeſimi una ſteſſa quantità, o quantità eguali; multiplicare, o dividere ciaſcun membro per una ſteſſa quantità, o per quantità eguali; formare la ſteſſa potenza, o eſtrarre la ſteſſa radice da un membro, che ſi forma, o ſi eſtrae dall' altro; finalmente ſoſtituire in un'

equa-

equazione invece d'un termine, o d'una lettera un altro termine, od un' altra lettera eguale alle prime. Finchè ſi opererà ſull' equazione in queſto modo, ſaranno ſempre legittime le conſeguenze che ſe ne dedurranno; or queſti, e non altri ſono gli artificj dell' Analiſi; Incominciamo dalle equazioni di primo grado.

81. Se l'equazione non contiene più d'una incognita x; ſi traſpongano in un ſolo membro dell' equazione tutti i termini che contengono l'x, laſciando gli altri nell' altro membro; ſi facciano ſu amendue i membri dell' equazione le operazioni a quelle contrarie, per cui reſta l'x inviluppato con altre quantità; cioè ſe è diviſo per a, ſi multiplichi tutta l'equazione per a; ſe è multiplicato per a, ſi divida per a tutta l'equazione... ec.; finoattantochè reſti l'x da ſe ſolo in un membro, e le quantità cognite nell' altro membro dell' equazione. Si cerchi il valore di $ax + bc = \frac{dx}{c} + ca$; ſi avrà, traſponendo $\frac{dx}{c}$, e bc, $ax - \frac{dx}{c} = ca - bc$; multiplicando tutto per c, ſi ha $cax - dx = c^2 a - bc^2$; o ſia $(ca - d)x = c^2 a - bc^2$, e dividendo per $ca - d$ ſi ha finalmente $x = \frac{c^2 a - bc^2}{ca - d}$.

Con queſte, ed altre ſimili operazioni ſi *libera* l'incognita d'un' equazione data; cioè ſi eſprime con quantità conoſciute l'incognita della data equazione.

82. Se l'equazione contiene più d'un' incognita, per avere determinatamente il valore di ciaſcuna incognita, ſi ſuppongono date tante equazioni, quante ſono le incognite, ed a queſte ſi applicano le ſovra eſpoſte riduzioni per le equazioni ad una ſola incognita co' tre ſeguenti metodi.

Primo metodo. Siano, a cagione d'eſempio, due le equazioni del

del problema a due incognite; $ax + by = a^2$; $\frac{ay}{c} = b - \frac{fx}{a}$; 1.° Si maneggi una di queſte equazioni, come non conteneſſe più d'una incognita; dalla prima equazione, ſi avrà $x = \frac{a^2 - by}{a}$; 2.° Si ſoſtituiſca queſto valore di x nella ſeconda equazione; ſi avrà $\frac{ay}{c} = b - \frac{fa^2 - fby}{a^2}$; 3.° Soſtituendo il valore di y, preſo in queſta equazione, nel valore di x trovato prima, ſi ha $x = a - \frac{b^2 ca + bcfa}{a^3 - bcf} = \frac{a^4 - ab^2 c}{a^3 - bcf}$.

Secondo metodo. Quando in ciaſcuna delle date equazioni ſi trovano le ſteſſe incognite; ſi prenda in ciaſcuna il valore d'una ſteſſa incognita; ſi faccia eguale il valore primo dell' incognita al ſecondo, il ſecondo al terzo . . . ec.; ſi avrà un' equazione, ed una incognita meno delle prime; ſu queſte ſi operi allo ſteſſo modo, e ſi ripeta la ſteſſa operazione, fino ad avere una ſola equazione, con una ſola incognita; il valore di queſta, ſoſtituito nella penultima, darà il valore d'un' altra incognita; il valore di queſte due, ſoſtituito nelle altre, ci darà... ec. Nel propoſto eſempio. 1.° Si ha dalla prima equazione $x = \frac{a^2 - by}{a}$, e dalla ſeconda equazione ſi ha $x = \frac{abc - a^2 y}{cf}$; 2.° Facendo un' equazione di queſti due valori d'x ſi ha $\frac{a^2 - by}{a} = \frac{abc - a^2 y}{cf}$; donde cavando il valore di y, e ſoſtituendolo in uno de' valori di x, ſi avrà x.

Terzo metodo. Se le due equazioni a due incognite ſieno tali, che i termini, che contengono la ſteſſa incognita, preſi ſenza ſegni, ſieno identici, ed i termini, che contengono un' incognita abbiano lo ſteſſo ſegno, mentre quegli, che contengono l'altra incognita hanno ſegni contrarj in amendue equazioni; la ſomma delle date equazioni darà il valore d'un' incognita, e la differenza delle

delle medeſime darà il valore dell' altra. Se nelle date equazioni vi ſia bensì la detta contrarietà de' ſegni, ma l'identità manchi de' termini, ſi ridurranno eſſi all' identità uno per uno, multiplicando ciaſcuna equazione per il coefficiente dell' incognita dell' altra equazione. Se i termini della ſteſſa incognita abbiano in amendue le equazioni gli ſteſſi ſegni, o ſegni contrarj, ſi riducano, ſe fa biſogno, queſti termini medeſimi all' identità, ed in vece della ſomma, e ſottrazione, ſi faccia una doppia ſottrazione nel caſo de' ſegni ſteſſi, ed una doppia addizione nel caſo de' ſegni contrarj. Queſto metodo ſi ſtende, come gli altri due, a tre, a quattro.... equazioni formate da tre, da quattro.... incognite.

Eſempj. 1.º caſo. $ax+by=c^2$, $ax-by=n^2$; fatta la ſomma di queſte, ſi ha $2ax=c^2+n^2$ cioè $x=\frac{c^2+n^2}{2a}$; e ſottraendo una dall' altra, ſi ha $2by=c^2-n^2$, cioè $y=\frac{c^2-n^2}{2b}$

2.º caſo. $ax+by=c^2$, $nx-my=n^2$; multiplicando la prima equazione per m, e la ſeconda per b ſi ha $amx+bmy=mc^2$ $bnx-bmy=bn^2$; la ſomma di queſte equazioni darà il valore di x; e multiplicando la prima delle date equazioni per n, e la ſeconda per a, la differenza delle equazioni, che ne riſulteranno, darà il valore di y; cioè per avere il valore d'un' incognita, ſi rendon identici i termini, che contengon l'altra.

3.º caſo. $ax+by=c^2$, $nx+my=n^2$; rendendo identico l'x, la differenza delle due equazioni darà l'y; e rendendo identico l'y, la differenza delle equazioni darà l'x; e ſe foſſero date $-ax+by=c^2$, $+nx-my=n^2$; ſi faccia la ſomma delle equazioni, reſi che ſiano identici i termini dell'x, o y, e ſi avrà y, o x.

83. Se il numero delle incognite foſſe maggiore del numero delle equazioni, non ſi potrà determinare il loro valore, ſenza aſſumere ad arbitrio il valore di alcune incognite. Dato $3x+2y=4$, ſi avrà $x=\frac{4-2y}{3}$, e queſto valore di x dipenderà dal valore arbitrario, che ſi dia ad y; cioè x avrà infiniti valori.

Analiſi delle equazioni di grado più elevato del primo.

84. Noi qui conſideriamo ſolamente il caſo, in cui nella equazione data non c'entri più d'un' incognita; negli altri caſi, ſi dovranno maneggiare i metodi, che eſporremo, conformemente a ciò, che s' è detto per le equazioni a più incognite di grado primo. Ma conviene prima di tutto diſtinguere l'equazioni che hanno tutte, o qualcuna delle ſue radici commenſurabili, e razionali, da quelle che le hanno immaginarie, o reali incommenſurabili. Qualunque poi ſia l'equazione, e qualunque il genere delle ſue radici, dovrà ſempre eſſere ridotta colle traſformazioni ſpiegate ſopra, a non avere nè frazioni, nè radicali, nè altro coeficiente fuor dell' unità al primo, o più elevato ſuo termine.

85. Per le equazioni, che hanno qualche radice commenſurabile. Si ſepari la data equazione in due ſomme qualunque, A, B; per eſempio in una ſi mettano tutte le quantità, che contengono una lettera conoſciuta, e nell' altra ſi ſcrivano tutte le altre quantità. Ordinando queſte due ſomme per x, ſi cerchi il maſſimo comune diviſore delle medeſime; ſe egli è un' equazione lineare, o di primo grado, ci darà un valore dell' incognita x; altrimenti, dividendo la data equazione per queſto maſſimo comune diviſore, ſi avrà per quoto, o un' equazione lineare, che contiene un valore d'x, o un' equazione compoſta, che, multiplicata col trovato comune diviſore maſſimo, reſtituirebbe la data equazione; ciaſcuna di queſte equazioni particolari ſi maneggi come la data, e le loro radici commenſurabili ſaranno le radici della data.

86. Eſpongo il metodo per trovare il maſſimo comune diviſore delle due ſomme A, B.

Si divida la maggiore quantità A per la minore B; ſe la diviſione ſi fa ſenza reſiduo, è evidente che B ſarà il maſſimo di-

 viſore

visore cercato. 2.º Se v'ha qualche residuo C, non si badi al quoto della prima divisione, e si divida B per C; se la divisione si fa senza residuo, sarà C il massimo divisore cercato. 3.º Si continui per simil modo l'operazione, non curando i quoti delle divisioni, ed il residuo D, che dividerà esattamente l'ultimo divisore, sarà il divisore cercato.

Dimostrazione. 1.º Se d è divisore di a, sarà d divisore di ma; Se d è divisore di $a = b + c$, e di una delle parti b, sarà d divisore dell' altra parte c; questi sono assiomi.

2.º Sia $\frac{A}{B} = m + \frac{C}{B}$ . . . . . sarà $A = mB + C$

$\frac{B}{C} = n + \frac{D}{C}$ . . . . . sarà $B = nC + D$

$\frac{C}{D} = p$ . . . . sarà $C = pD$

3.º D è divisore di C; dunque D è divisore di nC, e per essere D divisore di se stesso, sarà D divisore di $nC + D = B$; e per la stessa ragione sarà D divisore di A; dunque D è divisore comune di A, B. Innoltre; il massimo divisore di A, B, deve essere divisore di $mB + C$, cioè di C, è di nC, ossia di D; dunque il massimo divisore di A, B non può essere diverso da D; altrimenti sarebbe minore di un divisore D, cioè non sarebbe il massimo.

87. 1.º Si potrebbe collo stesso metodo trovare il massimo comune divisore di più quantità A, B, C; Si cerchi il massimo divisore q di A, B, ed il massimo comune divisore r di q, C, sarà r il massimo comune divisore di A, B, C; ma per ora noi non abbiamo bisogno di tanto. 2.º Il metodo di trovare il massimo divisore r di due quantità, serve ancora per ridurre una frazione a minimi termini, dividendo ciascun termine per r.

88. Se le date quantità A, B sieno quantità complesse, come lo sono veramente nel caso del num. 85., è necessario ordinarle

narle per rapporto ad una lettera; quindi 1.º Se nelle quantità A, B così ordinate si scopra ad occhio una quantità a, o numerica, od algebraica comune a tutti i termini d'amendue le quantità date, quella quantità comune sarà un divisore da notarsi in disparte, ed il comune massimo divisore de' quozienti delle date quantità divise per a, si dovrà multiplicare per quel primo divisore.

2.º Se prima di fare la divisione di A, B, si scopra che tutti i termini del divisore B siano multiplicati per una stessa quantità a, che non sia divisore di A, si prenda per divisore $\frac{B}{a}$, trascurando a: Sia detto lo stesso del dividendo A.

3.º Se l'esponente massimo della lettera, che distingue i termini sia minore in una quantità, che nell' altra, quella prima quantità si dovrà prendere per divisore, e l'altra per dividendo; Se l'esponente massimo della lettera, che distingue i termini sia eguale in A, ed in B, si può prendere qualunque delle due date quantità per dividendo.

4.º Se nel fare taluna delle prescritte divisioni, si trovi per quoto una frazione; Si riduca la frazione a minimi termini, e pel denominatore della ridotta si multiplichi il dividendo, e si rincominci da capo l'operazione.

89. Applico il metodo del num. 85. ad un esempio. Si cerchino le radici commensurabili di

$$\begin{array}{llll} x^3 & -2ax^2 & -3a^2x & -3a^2b = 0. \\ & -cx^2 & +3acx & +3abc \\ & +bx^2 & -2abx & \\ & & -bcx & \end{array}$$

Si separi l'equazione in due somme; cioè in una si mettano, a cagione d'esempio, le quantità che contengono la lettera c, e nell' altra le altre; si avrà

$$A \ldots x^3 - 2ax^2 - 3a^2x - 3a^2b; \text{ ed } -cx^2 + 3acx + 3abc$$
$$\qquad + bx^2 - 2abx \qquad\qquad\qquad\qquad - bcx$$

Nella ſeconda ſomma c'entra in tutti i termini la lettera c, e dividondola per $-c$, ſi ha $B \ldots\ldots x^2 - 3ax - 3ab$

$$+ bx$$

Dividendo A per B, non ſi ha alcun reſiduo, cioè B è diviſore di A, e di ſe ſteſſo, cioè della propoſta; ma per eſſere B un' equazione compoſta, ſi dovrà dividere la propoſta per B, ed avendoſi per quoto $x + a - c$, ſarà $x = c - a$ una delle radici cercate, e maneggiando B come ſe foſſe la propoſta, ſi avranno le altre due radici della propoſta, cioè $x = 3a$; $x = -b$.

90. Il metodo precedente ſi applica ſoltanto alle equazioni letterali. Per le equazioni, o letterali, o numeriche, ſi rifletta, che l'ultimo termine di qualunque equazione è eguale al prodotto di tutte le radici; quindi è, che qualcuno de' diviſori dell' ultimo termine della data equazione, ſoſtituito invece dell' incognita x, col ſegno $+$, o col ſegno $-$ renderà la ſomma de' termini eguale a zero; Si cerchino adunque tutti i diviſori dell' ultimo termine d'un' equazione; ſi ſoſtituiſca ciaſcuno di queſti diviſori, col ſegno $+$, e col ſegno $-$ invece dell' x; tutti quegli, che faranno eguale a zero la ſomma de' termini dell' equazione, preſi col ſegno contrario, ſaranno radici della medeſima. Nell' equazione ſuperiore, cercando tutti i diviſori di $3abc - 3a^2b$, ſe ne troveranno tre, cioè b, $-3a$, $a - c$, che rendono l'equazione eguale a zero, ſe ſi ſoſtituiſcano invece dell' x; Satà dunque $x = -b$

$$x = 3a$$

$$x = c - a$$

La difficoltà di trovare tutti i diviſori compleſſi dell' ultimo termine d'un' equazione letterale, fa preferire le più volte il metodo del numero precedente per trovare le radici d'una letterale equazione; ed il preſente ſi riſerva per le equazioni numeriche.

91. Se non ſi trovi verun comune diviſore maſſimo delle due ſomme (num. 89.), o ſe neſſuno de' diviſori dell' ultimo termine

mine

mine d'un' equazione, ſoſtituito invece d'x, faccia eguale a zero (num. 90.) la ſomma de' termini d'un' equazione, egli è certo, che le radici della propoſta equazione non ſono commenſurabili; ma ſibbene, o reali incommenſurabili, o immaginarie, o miſte d'incommenſurabili, e d'immaginarie. Dalle coſe dette ſulle radici immaginarie (num. 64.), è evidente, che nelle equazioni di ſecondo grado poſſono eſſere tutte le radici immaginarie; nelle equazioni di terzo grado poſſono eſſere al più due immaginarie, in quelle di quarto grado, o due, o tutte; in quelle di quinto, o due, o quattro.., ec.; quindi nelle equazioni di grado impari almeno una delle radici è reale. Se l'equazione di terzo grado a tre radici reali, ed incommenſurabili, con neſſun artificio analitico ſi potranno trovare i loro valori, e queſto caſo ſi chiama caſo *irredutibile*; Se l'equazione di quarto grado ha tre radici reali incommenſurabili, la quarta ſarà reale, e commenſurabile da trovarſi coi metodi de' numeri precedenti. In generale poi trovato un valore a d'un' equazione ordinata per x; dividendo la data equazione per $x - a = 0$, ſi abbaſſerà d'un grado l'equazione medeſima.

92. Si noti di più, che il vero grado delle equazioni non ſempre è indicato dall' eſponente maſſimo dell' incognita, per cui è ordinata. Le equazioni di ſecondo grado poſſono eſſere compoſte da due del primo; quelle di terzo poſſono eſſere compoſte da una del ſecondo, e da una del primo, oppure da tre del primo; quelle di quarto grado poſſono eſſere compoſte da quattro del primo, o da due del ſecondo, o da una del terzo, e da una del primo, e così nelle altre. Riſervo (come al n. 58.) ad un' altra operetta la ricerca delle equazioni compoſte, che multiplicate inſieme formano l'equazione data; cioè la ricerca de' fattori compleſſi d'una data quantità. Supponendo ora, che le componenti ſiano della forma $x - a = 0$, ſe a è una quantità commenſurabile, ſi troverà coi metodi già eſpoſti, ſe a è una quantità

tità incommenſurabile, ſi potrà trovare con quegli che eſporrò qui ſotto.

93. Finalmente ſi noti, che con facili ſoſtituzioni ſi riducono molte equazioni di grado ſuperiore alla forma delle equazioni di grado più depreſſo.

L'equazione $A \ldots a^4 - \frac{2q}{b} a^2 + p^2 \atop {-pb^2 \atop +\frac{1}{4}b^4}$ $= o$, che ſembra di quarto grado per l'a^4, ſi riduce ad una del ſecondo, facendo $a^2 = t$; cioè ſi riduce a $t^2 - \frac{2q}{b} t + p^2 \atop {-pb^2 \atop +\frac{1}{4}b^4}$ $= o$; l'equazione A ſi chiama *derivativa* del ſecondo grado. Così $B \ldots b^6 - 2sb^4 + s^2 b^2 - t^2 \atop +v b^2$ $= o$, che ſembra, per il b^6, di ſeſto grado, ſi riduce ad una del terzo, facendo $b^2 = z$, cioè ſi riduce a $z^3 - 2sz^2 + s^2 b^2 - t^2 \atop +v b^2$ $= o$; l'equazione B, ſi chiama *derivativa* del terzo grado... ec. E' evidente, che ſoſtituendo le radici delle equazioni derivate t; z nelle ſuppoſte $a^2 = t$, $b^2 = z$, ſi avranno con una ſemplice eſtrazione di radici, i valori di a, b delle derivative.

94. Trovare il valore d'x delle equazioni di ſecondo grado $x^2 - px - q = o$.

Si ſupponga $x = y + \frac{1}{2}p$, affine di togliere il ſecondo termine della data equazione, ſi avrà $y^2 - \frac{1}{4}p^2 \atop - q$ $= o$; cioè $y^2 = \frac{1}{4}p^2 + q$, ed eſtraendo da amendue i membri di queſta equazione la radice ſeconda, ſi ha $y = \pm\sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}$; ed eſſendo $x = y + \frac{1}{2}p$, ſarà $x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}$

La preparazione di togliere il ſecondo termine della propoſta equazione, ſi ſupporrà già fatta nel problema ſeguente, che comprende le equazioni d'ogni grado più elevato del ſecondo.

95. Trovare il valore d'x dell' equazione

$$A \ldots x^m - Bx^{m-2} - Cx^{m-3} - Dx^{m-4} \ldots - Q = o.$$

1.° Si rappreſenti la radice cercata x con tante lettere $a, b, c \ldots$ ec. quante ſono unità nell' eſponente m del grado dell' equazione A, una meno; cioè per le equazioni di terzo grado, ſi ſupponga

$$x = a + b$$

per quelle di quarto... $x = a + b + c$

per quelle di quinto... $x = a + b + c + d$

.... ec.

2.° Si alzi ciaſcun membro di queſt' equazione ipotetica alla potenza di grado m.

3.° Si ſeparino dal ſecondo membro di queſt' ultima equazione le quantità, che corriſpondono ad x^{m-2}, x^{m-3}.... ec.

4.° Si introducano nello ſteſſo ſecondo membro gli x^{m-2}, x^{m-3}.... invece de' loro valori eſpreſſi in a, b...., e traſponendo ſi faccia tutta l'equazione eguale a zero; ſi avrà A'.

5.° Si ſuppongano i coeficienti de' termini di A', eguali ai coeficienti de' termini corriſpondenti di A, e combinando inſieme le equazioni, che ne riſulteranno, ſi ricavino i valori di a, b, c... ec.

96. Prima di fare l'applicazione del metodo, è neceſſario dimoſtrare un teorema, che ha frequentiſſimo uſo in tutta l'analiſi, e ſu cui ſi appoggia tutta la riſoluzione delle equazioni, che ora ſpieghiamo; egli è il ſeguente.

Se $ax + bx^2 + cx^3 \ldots$ ec. $= ex + fx^2 + gx^3 \ldots$ ec. sarà

$$\begin{aligned} a &= e \\ b &= f \\ c &= g \\ &\ldots \text{ec.} \end{aligned}$$

Il Sig. Sketch nel suo opuscolo inglese sulle *flussioni*, lo dimostra pel caso, che x sia una piccolissima frazione, o, come dicono più propriamente, una quantità infinitamente piccola. Si divida, dice, ciascun membro dell' equazione per x; si avrà $a + bx + cx^2 \ldots$ ec. $= e + fx + gx^2 \ldots$ ec., e per essere infinitamente piccola l'x, non si turberà l'equazione, sprezzando bx, cx^2, $\ldots fx$, $gx^2 \ldots$, sarà dunque $a = e$. Levando ora dalla equazione già ridotta per mezzo della divisione, le quantità eguali a, e, sarà $bx + cx^2 + \ldots$ ec. $= fx + gx^2 + \ldots$ ec. sulla quale si potrà ripetere all' infinito la stessa dimostrazione.

Quando l'x non sia una quantità infinitamente piccola, ciocchè sempre si suppone nell' Analisi finita, è evidente, che riducendo l'equazione alla forma $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} \ldots$ ec. $= 0$, il coeficiente a conterrà la somma delle radici, b il prodotto delle radici prese due a due.... ec.; dunque se questa equazione si suppone identica con $x^m + ex^{m-1} + fx^{m-2} \ldots$ ec. $= 0$, il coeficiente e conterrà la somma delle radici della prima equazione, b il prodotto delle medesime, prese a due a due... ec.; cioè sarà

$a = e$;

$b = f$

... ec. Quindi a ragione suppongono gli Analisti eguali i termini, o i coeficienti de' termini corrispondenti di due date equazioni identiche: Intendono essi che ciò si faccia, quando dicono di *paragonare i termini* di due date equazioni supposte eguali.

97. Applicazione del metodo. Sia la proposta di grado terzo $A \ldots x^3 - px - q = 0$, e la radice cercata $x = a + b$; sarà

$$x^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Quale è in questo secondo membro la quantità, che è multiplicata

cata

cata per $x = a + b$? Fatta un po di riflessione, si vede subito, che $3a^2b + 3ab^2$ è eguale a $3ab$ multiplicato per $a + b$, cioè per x; invece dunque di $3a^2b + 3ab^2$ si potrà scrivere $3abx$, e si avrà

$$A' \ldots x^3 - 3abx - \begin{matrix} a^3 \\ + b^3 \end{matrix} = 0$$

che è un' equazione identica all' A. Quindi $\left.\begin{aligned} 3ab &= p \\ a^3 + b^3 &= q \end{aligned}\right\} = B$

Dalla prima di queste equazioni si ha..... $ab = \frac{1}{3}p$

$$a^3b^3 = \frac{1}{27}p^3$$

e dalla seconda si ha .... $(a^3 + b^3)\,a^3 = a^3 q$

cioè $a^6 + a^3b^3 = a^3q$,

e fatta la sostituzione del valore di a^3b^3 dedotto dalla prima equazione si ha $a^6 - qa^3 = -\frac{1}{27}p^3$

che è un' equazione derivativa di secondo grado; d'onde

$$a^3 = \frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}}$$

Resta a determinarsi il b; ma sostituendo il valore di a, e di a^3 nelle equazioni B, si ha

dalla prima

$$b = \frac{p}{3a} = \frac{p}{3\sqrt[3]{\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}}}$$

e dalla

e dalla seconda

$$b = \sqrt[3]{q - a^3} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q \mp \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}}$$

donde

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}}$$

$$+ \frac{p}{3\sqrt[3]{\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}}}$$

oppure

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}}$$

$$+ \sqrt[3]{\frac{1}{2}q \mp \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}}$$

98. Sia la proposta $A \ldots\ldots x^4 - px^2 - qx - r = 0$, e la radice cercata $x = a + b + c$; sarà

$$\begin{array}{llllll} x^4 = a^4 + 46a^3 + & 6b^2a^2 + & 4b^3a + & b^4 & & = 0 \\ + 4ca^3 + & 12b^c a^2 + & 12b^2ca + & 4b^3c & & \\ & + 6c^2a^2 + & 12bc^2a + & 6b^2c^2 & & \\ & & + 4c^3a + & 8bc^3 & & \\ & & & + c^4. & & \end{array}$$

Qual'è

Qual'è in questo secondo membro la quantità, che è multiplicata per $x^2 = (a + b + c)^2$, e quale è quella, che è multiplicata per $x = a + b + c$? Si disponga il secondo membro nel modo seguente

$$\left.\begin{array}{llll} 4c^{a^3} + 2ba^2 & + 4b^3a & + 2b^4 & \\ + 8bca^2 & + 8b^2ca & + 4b^3c & \\ + 8c^2a^2 & + 4bc^2a & + 2b^2c^2 & \\ & + 4c^3a & & \end{array}\right\} = B$$

$$\left.\begin{array}{llll} 4ba^3 + 4b^2a^2 & + 4bc^2a & + 4b^2c^2 \\ + 4bca^2 & & + 4bc^3 \end{array}\right\} = C$$

$$\left.\begin{array}{l} a^4 + * - 2c^2a^2 + 4b^2ca + c^4 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - b^4 \end{array}\right\} = D$$

Facendo la divisione di B per x^2, ossia per $(a + b + c)^2$, si troverà

$$B = (2b^2 + 4ac)(a + b + c)^2 = (2b^2 + 4ac)x^2,$$

e facendo la divisione di C per x, ossia per $a + b + c$, si troverà

$$C = (4ba^2 + 4bc^2)(a + b + c) = (4ba^2 + 4bc^2)x$$

restando D non divisibile per x, cioè senza x per fattore. Quindi l'equazione ipotetica si cambierà in questa

$$\begin{array}{llll} A' \ldots\ldots x^4 - 2b^2x^2 - 4ba^2x - a^4 & & = 0 \\ \qquad - 4acx^2 - 4bc^2x + 2c^2a^2 & & \\ \qquad\qquad\qquad - 4b^2ca & & \\ \qquad\qquad\qquad - c^4 & & \\ \qquad\qquad\qquad + b^4 & & \end{array}$$

Para-

Paragonando A' con A, si ha 1.° $b^6 - \frac{1}{2}pb^4 + \frac{1}{4}rb^2 - \frac{1}{64}q^2 = 0$

$$+\frac{1}{16}p^2b^2$$

2.° $a^4 - \frac{q}{4b}a^2 + \frac{1}{16}p^2 = 0$

$$-\frac{1}{4}pb^2$$

$$+\frac{1}{4}b^4$$

3.° $c = \frac{p - 2b^2}{2a}$

La prima equazione è derivativa del terzo grado, e darà b; la seconda è derivativa del secondo grado, e darà a; la terza è di primo grado, ed esprime il valore di c.

Per applicare queste equazioni più comodamente alle formole de' num. precedenti, si introducano alcune denominazioni ausiliarie ad arbitrio, da rimettersi al primo valore dopo finiti i calcoli necessarj per iscioglierle; così nella prima equazione fatto $p = 4s$, $q = 8t$, $r = 4v$, si avrà

$$b^6 - 2sb^4 + s^2b^2 - t^2 = 0$$
$$+ vb^2$$

99. E' evidente, che il metodo è universale per ogni grado; per avere le radici d'un' equazione di quinto grado, si dovrà sciogliere un' equazione di quarto grado, una del terzo, una del secondo, ed una del primo, ed in generale, per avere le radici d'un' equazione di grado m, si dovranno sciogliere tutte le equazioni di grado inferiore fino inclusivamente il primo. Vero è, che per la lunghezza de' calcoli che devono farsi in questo metodo, si ha ricorso ad altri metodi più semplici, presi dalle equazioni indeterminate; noi gli spiegheremo altrove; intanto

tanto

tanto credo, che farà piacere ai lettori il vedere come *con una sola trasformazione del primo termine di qualunque data equazione*, si hanno le sue radici. Il Varignon (Acad. Royal. 1699.) ha trovate per questa strada le radici delle equazioni di secondo e terzo grado solamente, senza accennare che si poteva stendere a tutte l'altre equazioni.

100. Per l'equazione $x^3 \pm px \pm q = 0$; 1.° Se $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}q^2$, le due radici positive, o negative (la somma delle quali è eguale alla terza), sono sempre eguali tra se: Se il p sia negativo, ed $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4}q^2$, due radici dell' equazione sono immaginarie: Se $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}q^2$, le tre radici sono tutte reali, ed ineguali.

2.° Nel primo caso, ciascuna delle radici eguali sarà sempre $\frac{\pm 3q}{\mp 2p}$: Nel secondo caso (che, per le cose dette, vale anche quando il solo p sia positivo), si chiami r^2 un quadrato maggiore di p, ed $s = r^2 \pm p$, se sia $\frac{q}{s} = r$, sarà $\frac{\pm q}{s}$ la radice dell' equazione, quando essa sia commensurabile: Nel terzo caso, $\frac{\pm q}{s}$ sarà, come prima, la radice massima dell' equazione, e preso r^2 minore di p sarà similmente una delle minori radici. Il segno da premettersi al valore delle radici trovate sarà sempre contrario al segno de' quoti delle accennate divisioni, e se non si trovi l'r^2 colle due proprietà indicate, la radice sarà incommensurabile da cercarsi colla formola dimostrata. 3.° Comunque nel caso irredutibile la formola generale dia le

ra-

radici dell' equazione sotto forme immaginarie, riducendo in serie infinite la formola medesima, si avrà un' approssimazione alle radici vere, e spogliata delle quantità immaginarie. La dimostrazione di questa verità appartiene al libro secondo di questa trattazione, dove si parla delle serie infinite; fatto $\frac{1}{2}q = a$, e

$$\sqrt{\frac{1}{2}q^2 - \frac{4}{27}p^3} = b\sqrt{-1},$$

sarà $x = \sqrt[3]{a \pm b\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{a \mp b\sqrt{-1}}$,

e svolgendo in serie ciascuno di questi radicali, la loro somma sarà reale, e se una delle quantità b, a sia molto maggiore dell' altra, con pochi termini della serie si avrà un valore d'x prossimamente vero; come ciascuno potrà vedere da se, dopo la teoría dell' evoluzione delle serie. Queste riflessioni sulle radici delle equazioni di terzo grado, daranno molto lume per le radici di grado quarto: Conchiudo questa Introduzione con un problema.

101. Problema. Due sorgenti, ciascuna delle quali scola uniformemente, hanno empiuto uno de' sottoposti conservatoj a, la prima nel tempo b, la seconda nel tempo c, ed il conservatojo d, la prima nel tempo e, la seconda nel tempo f; si cerca quant' acqua sia uscita da ciascuna sorgente.

1.° Siano x, y le quantità d'acqua, cioè il numero a cagione d'esempio de' secchi d'acqua usciti ad empire le conserve a, d, nel corso di giorni b, c, e, f. Sarà bx la quantità d'acqua uscita dalla prima sorgente nel tempo b, e cy la quantità d'acqua uscita dalla seconda sorgente nel tempo c; per le condizioni del problema, queste due quantità d'acqua devono essere

eguali

eguali alla quantità d'acqua a, che empie il conservatojo; si avrà dunque $bx + cy = a$.

2.° Se nel problema non entrasse altra condizione che questa, non si potrebbe determinare nè l'x, nè l'y, se non mettendo un arbitrario valore ad y, o ad x; avendosi, trasponendo

$bx = a - cy$

$cy = a - bx$, e dividendo la prima equazione per b, e la seconda per c, si avrebbe

$$x = \frac{a - cy}{b}$$

$y = \frac{a - bx}{c}$, e facendo $y = h$ nella prima, ed $x = k$ nella seconda, si avrebbe

$$x = \frac{a - ch}{b}$$

$y = \frac{a - bk}{c}$ questo problema perciò sarebbe indeterminato, ed ammetterebbe infinite soluzioni, secondo gli infiniti arbitrarj valori di h, e di k.

3.° Ma la seconda condizione del proposto problema, ci dà una nuova equazione, e determina con ciò ad una sola soluzione i valori delle due incognite x, y; dacchè si avrà ex, fy per le quantità d'acqua sparse nel tempo e, f, che prese insieme devono essere eguali a d; cioè $ex + fy = d$.

4.° Mettendo in questa equazione il valore d'x preso nella prima, e sostituendo nella prima il valore d'y presi da questa seconda equazione, si ha $x = \frac{cd - af}{ce - bf}$.

$$y = \frac{ae - db}{ce - bf}.$$

I

102. Se

102. Se sia $a = 195 \ldots\ldots d = 330$; sarà $x = 30$

$$\begin{array}{lll} b = 2 & e = 5 & y = 45 \\ c = 3 & f = 4 & \end{array}$$

Se $a = 120 \ldots\ldots d = 190$; sarà $x = -30$

$$\begin{array}{lll} b = 4 & e = 3 & y = 40 \\ c = 6 & f = 7 & \end{array}$$

Questi risultati adempiono esattamente tutte le condizioni del problema; nè si può anche per ciò dubitare della loro esattezza; ma che significa quel -30? Si ritenga il significato del segno $-$; si cerca quì quanta sia l'acqua che esce dalla prima sorgente, e si trova che n'esce -30 misure; lo stato opposto all'uscire non è altro che l'entrare; onde la prima sorgente tanto non ne perde, che anzi ne acquista 30, ne ruba invece di darne, invece d'impoverire arricchisce; se ciò non può succedere in qualche caso particolare, o per la natura, o per la posizione delle sorgenti, sarà pure impossibile, che si sieno verificate in quel caso le condizioni date.

103. Se oltre la somma delle perdite d'acqua a, d, ed oltre i tempi b, c, e, f si desse ancora il prodotto delle due perdite; cioè $xy = g$, il problema avrebbe più condizioni, o più equazioni che incognite; cioè sarebbe *più che determinato*. Questo eccesso di equazioni, o condizioni rendono per lo più impossibile il problema; cioè nel caso nostro sarà impossibile il problema sempre che g non sarà eguale a $\frac{cd - af}{ce - bf} \times \frac{ae - db}{ce - bf} = h$, e quando ciò succeda, si avrà sempre un' equazione identica; cioè $g = h$, cioè la condizione aggiunta sarà un' equazione inutile al problema, già sciolto per le altre due. Ben è vero, che l'identità delle equazioni non sempre mostra l'inutilità delle condizioni date; talvolta è segno, che la quistione malamente fu proposta a modo di problema, ma si veramente doveva profe-

rirsi come un teorema; talvolta altresì mostra, che si è assunta una condizione superflua, ommessa quella che era necessaria alla soluzione del problema; talvolta finalmente indica, che s'è commesso errore nel calcolo.

LIBRO PRIMO.

Progressioni geometriche, ed aritmetiche.

CAPO PRIMO.

Delle ragioni geometriche, ed aritmetiche.

Nozioni generali sulle ragioni, e proporzioni geometriche.

1. LA teoría delle Progressioni geometriche, ed aritmetiche, suppone quella delle geometriche, ed aritmetiche ragioni, ed immediatamente trae seco la teoría de' logaritmi. Questa sarà la materia de' tre capi, in cui va distinto il presente libro, e la tratterò, spero, non senza qualche particolare eleganza, usando ad ogni passo gli artificj analitici, poc' anzi spiegati nell' introduzione.

2. Ragioni geometriche. Le voci *ragioni*, *rapporto*, significano un confronto, o un paragone di una quantità qualunque con un' altra; quando si paragona una quantità con un' altra per conoscere quante volte, o come la prima contenga l' altra, o sia nell' altra contenuta, quel rapporto, e quella ragione delle due date quantità si chiama rapporto, o ragione *geometrica*, o senz' altro aggiunto, *ragione*.

3. E' evidente. 1.° Che per avere una ragione geometrica si richieggono nè più nè meno di due termini; cioè quello, che si paragona, e quello, a cui si paragona.

2.° Che la ragione geometrica di questi due termini si conosce colla divisione d' uno d' essi per l' altro.

3.° Che quindi si può dinotare la ragione geometrica co' soliti *due punti* di divisione, o a modo d' una frazione volgare, e allora $a:b$, oppure $\frac{a}{b}$ si legge a sta a b.

4.° Che la proprietà delle frazioni volgari si convengono alle

ra-

ragioni geometriche, e quelle delle ragioni geometriche si convengono alle frazioni volgari.

5.° Che le quantità, tralle quali si fa il paragone per iscoprire la ragione di *contenenza* d'una nell'altra, devono essere della medesima specie, ed insieme considerate come quantità, o numeri astratti; cioè non considerate secondo il loro essere specifico, ma secondo l'essere numerico di ciascuna.

4. Nelle ragioni geometriche. 1.° Il primo termine, che si paragona coll'altro, si chiama *antecedente*, ed il secondo *conseguente* della ragione; il quoto della divisione dell'antecedente pel conseguente, si chiama *esponente* della ragione, e se l'esponente della ragione è una frazione, si suppone essa ridotta a minimi termini.

2.° Se l'antecedente è eguale al conseguente, la ragione geometrica si chiama ragione d'*uguaglianza*: Se l'antecedente è maggiore del conseguente, la ragione sarà di *maggiore disuguaglianza*: Se l'antecedente è minore del conseguente, la ragione sarà di *minore disuguaglianza*.

3.° Se il rapporto, che in una ragione ha l'antecedente al conseguente sia lo stesso che il rapporto, che in un'altra ragione ha il conseguente all'antecedente, si dice, che i termini della prima tra loro stanno in ragione *inversa*, o *reciproca* de' termini della seconda; e se l'antecedente di una ragione ha al suo conseguente lo stesso rapporto, che l'antecedente di un'altra al suo conseguente, si dice, che i termini della prima stanno fra loro in ragione *diretta* de' termini della seconda ragione.

4.° Se si multiplichino insieme molte ragioni *semplici* $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$; si chiama $\frac{ace}{bdf}$ ragione *composta* delle date; Se le ragioni componenti sono tutte tra se eguali, la ragione composta delle date ragioni prese due a due, si chiama ragione *dupplicata*: prese a tre a tre *triplicata*: prese n ad n, $n^{plicata}$ di qualunque delle date: Ciascuna delle ragioni componenti, sta in ragione *suddupplicata* della composta sua dupplicata: *suttriplicata* della composta sua triplicata; Su $n^{plicata}$ della composta sua $n^{plicata}$.

5. Assiomi sulle ragioni semplici e composte. 1.° Le ragioni eguali hanno esponenti eguali, e le ragioni, che hanno esponenti eguali, sono eguali.

2.° Le ragioni disuguali hanno esponenti disuguali, e le ragioni d'esponenti disuguali sono disuguali.

3.° In due, o più ragioni, quella è maggiore, o minore delle altre, che ha l'esponente maggiore, o minore, e se l'esponente d'una ragione è maggiore, o minore dell'esponente delle altre, quella ragione è maggiore, o minore delle altre.

4.° Se si paragonino due quantità disuguali a, b, ad un'altra d, la più grande a avrà una maggior ragione a d che le altre, e quella tra a, b, che avrà una maggiore ragione a d, sarà maggiore delle altre.

5.° Paragonando una quantità d a due quantità disuguali a, b, la ragione di d alla più grande a sarà minore della ragione di d all'altra, e se la ragione di d ad una quantità a sarà minore della ragione di d all'altra, sarà a maggiore dell'altra.

6.° Le ragioni di d a diverse quantità eguali sono eguali, e se sono eguali le ragioni di d a diverse quantità, queste saranno tra se eguali.

7.° Non si muta la ragione di a a b comunque si multiplichi; o si divida a, b per una stessa quantità, o per quantità eguali, essendo $\frac{ma}{mb} = \frac{a}{b}$.

10.° Quindi se i termini d'una ragione sieno ugualmente, o multipli, o summultipli de' termini d'un'altra, quella prima ragione sarà a questa eguale.

6. Assiomi sulle ragioni composte. 1.° Se sono eguali ciascuna a ciascuna le ragioni, che compongono due ragioni composte, le ragioni composte sono eguali.

2.° Se

2.° Se una ragione è composta di alcune date ragioni, ogni sua eguale si potrà concepire composta delle ragioni medesime.
3.° Se vi siano due ragioni, composte ciascuna da più ragioni, e tutte le *componenti* della prima e della seconda, toltane una per una, sieno eguali, quelle due residue ancora saranno eguali.

7. Proporzioni geometriche. L'egualianza di due ragioni geometriche, si chiama *proporzione geometrica*, o, senz'altro aggiunto, *proporzione*, o *analogía*; Quindi la teoría delle proporzioni è la stessa, che la teoría delle ragioni eguali.

8. E' evidente. 1.° Che per una proporzione vi vogliono nè più nè meno di quattro termini.
2.° Che la proporzione di quattro termini si conosce dall'egualianza de' quoti del primo termine diviso pel secondo, e del terzo diviso per il quarto; cioè dall'egualianza degli esponenti delle date ragioni.
3.° Che quindi la proporzione di quattro termini a, b, c, d, si può indicare così $a:b=c:d$, oppure $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, o segnando solamente le parti estreme del segno d'ugualianza si scrive $a:b::c:d$, e si legge a sta a b, come c sta a d.
4.° Se qualunque specie di quantità si esprima co' numeri, relativi ad una unità arbitrariamente assunta in ogni specie, potranno sostituirsi questi per quelle in ogni proporzione, ed allora i quattro termini d'una proporzione saranno tutti dell'istessa specie.

9. Quanto a quest'ultima riflessione, si noti, che la ragione è un numero, e due ragioni sono due numeri, che risultano da due confronti, che ponno farsi l'uno su d'una specie, e l'altro sull'altra; così lo spazio A, doppio dello spazio B, sta a B come un tempo a, doppio del tempo b, sta a b; ma finchè la proporzione sta espressa così, non si possono fare varie operazioni, che pure sono necessarie a farsi, sulle proporzioni; tale è l'alternazione, ed il prodotto delle quantità eterogenee (dell'

alter-

alternazione parleremo da qui a poco); in questi casi è sempre uopo esprimere in puri numeri le quantità, che servono di termini alla proporzione, e considerare a cagione d'esempio negli spazj A, B, e ne' pesi a, b, non *l'essere* di *spazio*, e di *tempo*, ma l'essere di *doppio* d'uno spazio, o d'un tempo, rispetto all'altro spazio, ed all'altro tempo.
A meglio dichiarare questa importante verità, soggiungo qui le parole del Sig. d'Alembert (*Traité de Dynamique*, alla nota del num. 14.). Essendo, dice egli, lo spazio, ed il tempo di diversa natura, ben si vede, che non si può dividere lo spazio per il tempo: quindi il dire, che le velocità sono come gli spazj divisi per i tempi, egli è un dire, che le velocità sono come i rapporti degli spazj ad una stessa misura comune, divisi per i rapporti de' tempi ad un'altra comune misura; cioè, che se si prenda, a cagione d'esempio, il piede per la misura degli spazj, ed il minuto per la misura de' tempi, le velocità di due corpi, che si muovono uniformemente, sono tra se come i *numeri* de' piedi scorsi da ciascuno, divisi per i *numeri* de' minuti da ciascuno impiegati a scorrergli, e non come i *piedi* divisi per i *minuti*.
Così egli; ed a dire più corto colle parole del discorso preliminare del medesimo autore, dividere i spazj per i tempi per avere la ragione delle velocità di due corpi, significa trovare la ragione, che ha *la ragione delle parti dello spazio alla sua unità*, *alla ragione delle parti del tempo alla sua unità*.

10. In qualunque proporzione $a:b::c:d$ i termini a, c si chiamano *antecedenti* della proporzione, cioè a primo antecedente, c il secondo; i termini b, d si chiamano *conseguenti* della proporzione, cioè b primo conseguente, d secondo conseguente. I termini a, d si chiamano *estremi*, i termini b, c *medj*; ciascuno de' termini antecedenti, o conseguenti si chiama *omologo* all'altro antecedente, o conseguente; ciascuno de' termini estremi può chiamarsi *analogo* all'altro estremo, e ciascun de' termini

medj

medj può chiamarsi *analogo* all' altro medio: Se i termini di mezzo sono uno stesso termine replicato, la proporzione si chiama *continua*, ed i termini sono *continuamente* proporzionali: Se i termini di mezzo sono tra se disuguali, la proporzione si chiama *discreta*, ed i termini sono *discretamente* proporzionali; il termine di mezzo d'una proporzione continua si chiama *medio geometricamente*, o, senz' altro, *medio* proporzionale.

Proprietà comuni alle egnali ragioni geometriche semplici, e composte.

11. Se $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, sarà $ad=bc$

Dim. Si multiplichi ciascun membro dell' equazione data per il prodotto de' conseguenti; o più brevemente, si levino le frazioni dalla data frazione; si avrà $ad=bc$.

12. Se $ad=bc$, sarà 1.° $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

2.° $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$

3.° $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

Dim. Si divida ciascun membro della data equazione
1.° per bd, si avrà la prima)
2.° per ac, si avrà la seconda) analogìa.
3.° per cd, si avrà la terza)

13. Se $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, sarà 1.° $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ *invertendo*

2.° $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ *alternando*

Dim.

Dim. Se $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, sarà (num. 11.) $ad=bc$; ma se $ad=bc$, si ha (num. 12.) $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$, ed $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$; dunque se $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, sarà ... ec.

14. Se $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, sarà 1.° $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ *componendo*.

2.° $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ *dividendo*.

Dim. Se $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, sarà $\frac{a}{b}\pm 1=\frac{c}{d}\pm 1$, ossia $\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$.

15. Se in $a, b, c,\ d, e, f$ sia $\frac{a}{b}=\frac{d}{e}$, e $\frac{b}{c}=\frac{e}{f}$, sarà $\frac{a}{d}=\frac{c}{f}$ *ordinando*.

Dim. Dalla prima analogìa si ha $\frac{b}{e}=\frac{a}{d}$, e dalla seconda si ha $\frac{b}{e}=\frac{c}{f}$; dunque $\frac{a}{d}=\frac{c}{f}$.

16. Se nelle stesse quantità sia $\frac{a}{b}=\frac{e}{f}$, e $\frac{b}{c}=\frac{d}{e}$, sarà pure $\frac{a}{d}=\frac{c}{f}$, *perturbando*.

Dim. Dalla prima analogìa si ha $af=be$, e dalla seconda si ha $be=cd$; dunque $af=cd$, d'onde $\frac{a}{d}=\frac{c}{f}$.

17. Se $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, ed $\frac{e}{b}=\frac{f}{d}$, sarà 1.° $\frac{a+e}{b}=\frac{c+f}{d}$ *conjungendo*.

2.° $\frac{a-e}{b}=\frac{c-f}{d}$ *disgiungendo*.

K 2

Dim.

Dim. Dalla prima analogìa ſi ha $ad = bc$, e dalla ſeconda $ed = bf$; dunque ſommando, e ſottraendo la ſeconda equazione dalla prima ſi ha $ad \pm ed = bc \pm bf$, cioè $(a \pm e)d = (c \pm f)b$; d'onde $\frac{a \pm e}{b} = \frac{c \pm f}{d}$.

18. Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \ldots$ ec., ſi ha

1.° $\frac{a + c + e \ldots ec.}{b + d + f \ldots ec.} = \frac{e}{f} = \frac{a}{b} = \ldots$ ec. *ſommando*.

2.° $\frac{a - c - e \ldots ec.}{b - d - f \ldots ec.} = \frac{e}{f} = \frac{a}{b} = \ldots$ ec. *ſottraendo*.

Dim. Dalle date ragioni ſi ha (num. 17.) $\frac{a \pm c}{b \pm d} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$; donde $\frac{a \pm c}{e} = \frac{b \pm d}{f}$, ed $\frac{a \pm c \pm e}{e} = \frac{b \pm d \pm f}{f}$; dunque $\frac{a \pm c \pm e}{b \pm d \pm f} = \frac{e}{f} = \frac{a}{b} = \ldots$ ec.

19. Dati a, b, ſi ha 1.° $1 : a :: b : ab$

2.° $1 : \frac{a}{b} :: b : a$

La dimoſtrazione è manifeſta dal num. 11., e dalla deffinizione della multiplicazione, e diviſione di a per b.

20. Ben m'avveggo, che le formole così *ſeccamente* eſpoſte in queſt' articolo cagioneranno imbarazzo ai meno eſercitati; accompagneranno eſſi, o mentalmente, o colla penna in mano tutti i calcoli accennati, o ſteſi ne' num. precedenti, ma all' ultimo non ſapranno quale ſia la formalità, che è ſtata preſa di mira in ciaſcuna operazione. Conviene però avvezzarſi ad intendere il linguaggio algebraico, muto sì, ma, a chi ben lo penetra, aſſai più d'ogni favella eſpedito, e penetrante: Si uſano i caratteri algebrici per generalizzare le propoſizioni: Sta alla fantasìa il ſoſtituire agli a, b.... le aſtratte, o contratte idee delle quantità, di cui naſca il diſcorſo. Quando per eſempio ſi dice, che ſe $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, farà $ad = bc$, s'intenda, che in quattro termini geometricamente proporzionali, il prodotto degli eſtremi è eguale al prodotto de' medj; quando ſi dice, che ſe $ad = bc$, farà $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \ldots$ ec., s'intenda, che ſe ſi ſepari in due fattori ciaſcun membro d'un' equazione, ſi potrà formare con eſſi reciprocamente preſi un' analogìa, nella quale ſe ſi alternino, o invertano i termini, non ſi turberà la proporzionalità; od anche, che ſe in quattro quantità a, b, c, d il prodotto delle eſtreme è eguale al prodotto di quelle di mezzo, quelle quattro quantità faranno in proporzione geometrica.

21. Si notino principalmente que' dieci modi d'argomentare uſitatiſſimi in tutto il calcolo, ed anche nella geometrìa. 1.° Se il prodotto di due termini ſia eguale al prodotto di due altri termini, comunque eſſi ſi ordinino in un' analogìa, ſi conſerverà ſempre la proporzione, purchè ſieno meſſi per termini analoghi i termini dello ſteſſo prodotto: Tutto ciò ſi ſarebbe potuto eſprimere colla ſola formola ſe $ad = bc$, farà $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, indicandoſi con ciaſcuna lettera qualunque termine dello ſteſſo prodotto.

2.° Se quattro termini ſono proporzionali, lo faranno ſempre, comunque ſi permutino di ſito tra ſe, purchè que', che ſono medj, o eſtremi nella data analogìa reſtino nelle altre, o eſtremi, o medj. Due di queſte permutazioni hanno nome particolare, e ſono l'*alternare*, ove il terzo va ad eſſere ſecondo, ed il ſecondo termine paſſa ad eſſere terzo, e l'*invertere*, ove i con-

conſeguenti divengono antecedenti, e gli antecedenti, conſeguenti; le altre permutazioni non hanno nome proprio, e non ſon altro che alternazioni, o inverſioni ripetute nelle analogìe, che naſcono dalla prima alternata, o inverſa, e ſono in tutto ſette.

Sia $a:b::c:d$

Sarà..... I. $a:c::b:d$.... alternando la data
II. $b:a::d:c$.... invertendo la data
III. $b:d::a:c$.... alternando la II.ª
IV. $d:b::c:a$.... invertendo la III.ª
V. $d:c::b:a$.... alternando la IV.ª
VI. $c:d::a:b$.... invertendo la V.ª
VII. $c:a::d:b$.... alternando la VI.ª

3.º Se i conſeguenti d'un' analogìa ſiano antecedenti d'un' altra, ſi argomenta *ordinatamente*, ommettendo i termini comuni alle due analogìe, e prendendo gli altri termini per termini d'una proporzione; cioè facendo termini della prima ragione i termini dell' analogìa, in cui ſi ſono ommeſſi i conſeguenti, e termini della ſeconda ragione i termini dell' analogìa, in cui ſi ſono ommeſſi gli antecedenti.

4.º Se i termini eſtremi d'una analogìa ſiano i termini di mezzo d'un' altra, ſi argomenta *perturbatamente;* cioè laſciati i termini comuni ſi prendono per i due eſtremi i termini dell' analogìa, in cui ſi ſono ommeſſi i medj.

5.º Se ſolamente gli antecedenti ſiano diverſi in due analogìe, e riſpettivamente eguali i conſeguenti, ſi argomenta *congiuntamente;* cioè ſi congiungono in una proporzione agli antecedenti della prima gli antecedenti della ſeconda analogìa.

6.º ... ec.

Dalle dette diverſe ſpecie d'argomentare, ſe ne poſſono dedurre delle altre non meno utili di quelle prime. 1.º La ſomma de' termini della prima ragione d'una proporzione, ſta alla ſomma de'

de' termini della ſeconda ragione, come il primo conſeguente ſta al ſecondo.

2.º La differenza de' termini della prima ragione ſta alla differenza de' termini della ſeconda ragione, come il primo conſeguente ſta al ſecondo.

3.º La ſomma de' termini della prima ragione ſta alla ſomma de' termini della ſeconda ragione, come la differenza de' primi termini alla differenza de' ſecondi.

4.º La ſomma de' termini d'una ragione ſta alla differenza de medeſimi, come la ſomma de' termini d'una ragione eguale ſta alla loro differenza.

5.º ... ec.

22. Invertendo la ſeconda analogìa del num. 19. ſi ha $\frac{a}{b}:1::a:b$; queſto è il fondamento della teorìa delle frazioni; cioè la frazione ſta all' unità, come il numeratore ſta al denominatore; quindi 1.º ſe il numeratore d'una frazione è eguale, maggiore, o minore del denominatore, la frazione ſarà eguale, maggiore, o minore dell' unità.

2.º Se le frazioni hanno un medeſimo denominatore, ſono tra ſe in ragione diretta de' numeratori.

3.º Se le frazioni hanno un medeſimo numeratore, ſono tra ſe in ragione reciproca de' denominatori.

4.º Quindi ſe le frazioni hanno diverſi numeratori, e diverſi denominatori, ſono tra ſe in ragione compoſta della diretta de' numeratori, e dell' inverſa de' denominatori.

23. Laſcio all' induſtria di chi vuole ben apprendere la teorìa delle proporzioni il dedurre dalle coſe premeſſe varj altri teoremi, per mezzo delle traſformazioni; ne accenno alcuni.

Se $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, ſarà $ad=bc$; E 1.º Se $b=c$, ſarà $ad=b^2=c^2$; cioè in tre termini continuamente proporzionali, il prodotto degli

gli estremi, è eguale al quadrato del medio; e conseguentemente se in tre quantità a, b, d il prodotto ad delle estreme sia eguale al quadrato b^2 di quello di mezzo; quelle tre quantità sono in continua proporzione geometrica.

2.° Estraendo la radice quadrata da amendue i membri di quest' ultima equazione $ad = b^2$, si ha $b = \sqrt{ad}$; cioè il termine di mezzo d'una proporzione continua, è eguale alla radice quadrata del prodotto de' due estremi.

3.° Se a, d fossero due quadrati come f^2, g^2, il prodotto fg delle loro radici quadrate sarebbe medio proporzionale tra a, d; essendo $f^2 : fg :: fg : g^2$.

4.° Dividendo l'equazione $c^2 = ad$ per a, e per d; si ha $\frac{c^2}{a} = d$, $\frac{c^2}{d} = a$; cioè qualunque de' due estremi d'una proporzione continua è eguale al quadrato del termine di mezzo diviso per l'altro estremo.

5.° Dividendo allo stesso modo l'equazione $ad = bc$, primo per d, poi per c, indi per b, e finalmente per a, si ha

$$a = \frac{bc}{d} \ldots . \; c = \frac{ad}{b}$$

$$b = \frac{ad}{c} \ldots . \; d = \frac{bc}{a}$$

cioè qualunque termine d'una proporzione è eguale al prodotto de' termini non analogi, diviso per il suo analogo.

6.° Quindi si sciolgono i quattro problemi seguenti. Dati due termini qualunque d'una proporzione continua trovare il terzo. Dati tre termini qualunque d'una proporzione discreta trovare il quarto: Trovare una media proporzionale tra due date quantità: Trovare un quadrato eguale al prodotto di due date quantità.

Pro-

Proprietà comuni alle ineguali ragioni geometriche semplici, e composte.

24. Date $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, sarà $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} :: ad : bc$.

Dim. Si divida ad, bc per la stessa quantità bd; sarà $\frac{ad}{bd} : \frac{bc}{bd} :: \frac{a}{b} : \frac{c}{d} :: ad : bc$.

25. Se $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$; sarà (multiplicando le due ragioni per bd) $ad > bc$; e se $ad > bc$, dividendo tutto per bd, sarà $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$.

26. Se $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$; sia $\frac{a}{b+x} = \frac{c}{d}$; sarà $\frac{b+x}{a} = \frac{d}{c}$; cioè $\frac{b}{a} < \frac{d}{c}$; *invertendo*.

27. Se $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, sarà $\frac{a}{b} + 1 > \frac{c}{d} + 1$; cioè $\frac{a+b}{b} > \frac{c+d}{d}$; *componendo*.

28. Se $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, sarà $\frac{a}{b} - 1 > \frac{c}{d} - 1$; cioè $\frac{a-b}{b} > \frac{c-d}{d}$; *dividendo*.

29. Se $\frac{a}{b} > \frac{d}{e}$, e $\frac{b}{c} > \frac{e}{f}$, sarà $\frac{a}{d} > \frac{b}{e}$, e $\frac{b}{e} > \frac{c}{f}$; cioè $\frac{a}{d} > \frac{e}{f}$; *ordinando*.

30. Se

30. Se $\frac{a}{b} > \frac{e}{f}$, e $\frac{b}{c} > \frac{d}{e}$, sarà $af > be$, e $be > cd$; cioè $\frac{a}{d} > \frac{c}{f}$; *perturbando*.

31. Se $a > c$; $b > d$, ed $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, sarà $ad > bc$, ed $(ad \pm ab) > (bc \pm ab$; d'onde $\frac{a}{b} > \frac{c \pm a}{d \pm b}$.

32. Se $a+b:c+d::a:c$, ed $a+b$ la massima, sarà .... $a+b:c+d::a:c::b:d$; d'onde $b>d$, ed $(a+b+c)>(c+d+a)$.

33. Da questi modi d'argomentare sulle ineguali ragioni se ne possono dedurre altri assai, come nell'articolo precedente: Si poteva mettere il primo teorema di quest'articolo per teorema fondamentale di tutte le proporzioni: Se $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}::ad:bc$; fatto $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, sarà $ad=bc$; quindi si ha un nuovo metodo per formare una proporzione da' membri d'un' equazione; se $ad=bc$, sarà $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}::ad:bc$; se $a^2 d=b^2 c$, sarà $\frac{a^2}{b^2}:\frac{c}{d}::a^2 d:b^2 c$; se......, quindi finalmente si ha un' altra, e più diretta dimostrazione dell' ultima proposizione esposta al num. 22. per le frazioni.

Proprietà particolari delle ragioni geometriche composte.

34. Essendo $\frac{ab}{cd}=\frac{a}{c}\times\frac{b}{d}$; si ha generalmente, che due prodotti sono tra se in ragione composta delle ragioni, che hanno i fattori d'un prodotto ai fattori omologi dell' altro.

35. In qualunque numero di quantità $a, b, c, d, e, f \ldots$ ec., si ha $\frac{a}{f}=\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}\times\frac{c}{d}\times\frac{d}{e}\times\frac{e}{f}$, e generalmente, in qualunque serie di quantità la ragione della prima all' ultima è composta delle ragioni delle intermedie.

36. Date a, b; sarà $a^{\frac{m}{n}}$ a $b^{\frac{m}{n}}$ in ragione $\frac{m}{n}$ plicata di $a:b$.

Se $n=1$, ed m sia successivamente 2; 3; 4; ... ec. sarà $\frac{a^2}{b^2}=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}$, cioè i quadrati a^2, b^2 sono in ragione dupplicata delle sue radici; così $\frac{a^3}{b^3}=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}$; cioè i cubi a^3, b^3 sono in ragione triplicata delle sue radici ... ec. Se $m=1$, ed n sia successivamente 2; 3; 4; ... ec., sarà $\frac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}}\times\frac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}}=\frac{a}{b}$; $\frac{a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}}\times\frac{a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}}\times\frac{a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}}=\frac{a}{b}$ ... ec. cioè le radici sono in ragione suddupplicata, suttriplicata .... de' loro quadrati, cubi ... ec. Se m, n sieno amendue, numeri maggiori dell' unità, fatto $m=3$, ed $n=2$, $\frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$ saranno in ragione sesquiplicata di $\frac{a}{b}$, o in ragione suddupplicata di $\frac{a^3}{b^3}$ ... ec.

37. Se $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, sarà $\frac{a^n}{b^n}=\frac{c^n}{d^n}$.

Dim. $\frac{a^n}{b^n}$ è in ragione $n^{plicata}$ di $\frac{a}{b}$, o del suo eguale $\frac{c}{d}$; ma $\frac{c}{d}$ è in ragione su $n^{plicata}$ di $\frac{c^n}{d^n}$; dunque $\frac{a^n}{b^n}$ è in ragione $n^{plicata}$ della su $n^{plicata}$ di $\frac{c^n}{d^n}$; ed essendo la ragione $n^{plicata}$ della su $n^{plicata}$ la stessa ragione d'egualianza, sarà $\frac{a^n}{b^n} = \frac{c^n}{d^n}$.

38. Date a, b, si ha

1.° $a^2 : a\ b :: a\ b : b^2$

2.° $a^3 : a^2\ b :: a^2\ b : a\ b^2 :: a\ b^2 : b^3$

3.° $a^4 : a^3\ b :: a^3\ b : a^2\ b^2 :: a^2\ b^2 : a^2\ b^3 :: a^2\ b^3 : b^4$.

4.° ... ec.

La dimostrazione è manifesta, essendo, a cagion d'esempio, nella seconda proposizione

$$\left.\begin{array}{l} a^3 : a^2 b \\ a^2 b : a b^2 \\ a b^2 : b^3 \end{array}\right\} :: a : b.$$

39. Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, sarà $\frac{ac}{bc} = \frac{bc}{bd}$.

Dim. Dalla data analogìa, si ha

$$\left.\begin{array}{l} \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} \\ \frac{bc}{bd} = \frac{c}{d} \end{array}\right\} ; \text{ dunque } \frac{ac}{bc} = \frac{bc}{bd}.$$

40. Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, ed $\frac{e}{f} = \frac{g}{b}$, sarà (multiplicando insieme le due date equazioni) $\frac{ae}{bf} = \frac{cg}{db}$.

41. Se

I.	II.
$a : b :: c : d$	$a : b :: c : d$
$b : e :: g : f$	$e : f :: g : c$
$e : i :: b : k$	$b : i :: k : g$
$i : l :: m : n$	$m : n :: l : k$
... ec.	... ec.
III.	**IV.**
$a : b :: c : d$	$a : b :: c : d$
$c : e :: g : b$	$e : d :: f : g$
$g : i :: k : l$	$b : g :: i : l$
$k : f :: m : n$	$m : l :: n : k$
... ec.	... ec.

Sarà dalla I.ª $a : l :: cgbm : dfkn$

dalla II.ª $aebm : bfin :: l : d$

dalla III.ª $a : beif :: m : dbln$

dalla IV.ª $acbm : b :: cfin : k$

Tutto è evidente; essendo, per esempio, nella prima serie $\frac{abei}{beil} = \frac{cgbm}{dfkn}$; e riducendo a minimi termini la prima frazione, si ha $\frac{a}{l} = \frac{cgbm}{dfkn}$. Cioè in generale ne' termini delle Analogìe formate dalla multiplicazione de' termini omologi di più Analogìe date, si potrà tante volte ommettere qualche termine delle Analogìe componenti, quante egli serve d'antecedente, e di conseguente nelle prime loro ragioni, o d'antecedente, e di conseguente nelle seconde ragioni, o di antecedente, o di conseguente in amendue... ec.

42. I due teoremi de' num. 34. 35. appartengono alle ragioni composte di ragioni qualunque; gli altri, che seguono, appartengono alle ragioni composte di ragioni eguali. Infiniti sono i problemi, che col mezzo degli esposti teoremi si sciolgono per le ragioni composte d'amendue i generi. Sono troppo manifesti que', che risguardano le ragioni composte di ragioni eguali, come sarebbe; trovare una ragione dupplicata, triplicata, $n^{plicata}$ d'una data ragione; trovare una ragione sudduplicata, suttriplicata, su $n^{plicata}$ d'una data ragione... ec. Si noti principalmente la proposizione del num. 38. Serve essa per conoscere il numero de' medj razionali, che si possono inserire tralle potenze qualunque di due quantità; anzi con quelle formole restano questi agevolmente determinati. Tra' quadrati di a, b, si può inserire un solo medio continuamente proporzionale, ed è ab; tra i cubi di a, b se ne possono inserire due, e sono $a^2 b$, $a b^2$; tra... ec. E' facile il vedere, che le proposte formole, e le altre, che verrebber dopo non sono, che i termini delle potenze del binomio $a+b$, ommessi i segni, che gli congiungono, ed i coefficienti di ciascun termine (Tav. II.ª). La potenza quarta di $a+b$ è $a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4$; ommettendo i segni, ed i coefficienti, si ha a^4, $a^3 b$, $a^2 b^2$, ab^3, b^4; cioè tra a^4, e b^4 si possono inserire tre medj proporzionali, e sono $a^3 b$, $a^2 b^2$, ab^3; e tralle potenze m di a, b si può inserire un numero $m-1$ de' medj proporzionali, ed il termine $(n-1)^{esimo}$ della formola di qualche potenza di $a+b$ spogliato del segno, e del coefficiente, è l'n^{esimo} de' medj, che si possono inserire tra a^{m-1}, e b^{m-1}. Qui si parla sempre de' medj proporzionali, che sono razionali; parlando assolutamente, tra due quantità, qualunque esse sieno, si possono inserire infiniti medj proporzionali, come vedremo. Quanto ai primi due teoremi sulle ragioni composte di ragioni qualunque, basti, per vederne la fecondità, la soluzione de' seguenti cinque problemi.

43. Data qualunque ragione $\frac{a}{f}$, formarne una ragione comunque composta, ed eguale alla data.

Tra a, f si concepisca qualunque numero d'intermedie b, c, d, e; si avrà $\frac{a}{f} = \frac{a}{b} \times \frac{b}{c} \times \frac{c}{d} \times \frac{d}{e} \times \frac{e}{f}$ (num. 35.)

44. Dato qualunque numero di ragioni componenti, formarne una ragione composta.

E' manifesto che il prodotto delle date componenti sarà la ragione cercata: Ma avvi un altro metodo più elegante, e più utile in tutto il calcolo, e nella geometria:

1.º Se sien due le ragioni date $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, si faccia $a : b :: d : \frac{bd}{a} = p$; sarà $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{p}$.

2.º Se sieno date tre ragioni componenti $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$; componendo le prime due $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{p}$, e sarà ridotto il problema a cercare la ragione composta di $\frac{c}{p}$, $\frac{e}{f}$.

3.º Se vi sia qualunque numero A di date ragioni, si cerchi la ragione composta delle prime due; sostituita questa in A si avrà una nuova serie B di ragioni, che conterrà una ragione meno di A, e collo stesso metodo si cambierà la serie B in C, e C in D; fino ad avere una sola ragione, che sarà la composta delle date A.

45. Data la ragione composta $\frac{a}{f}$, e tutte le ragioni componenti meno una, trovare questa ragione incognita.

E' evidente, che dividendo la compoſta ragione $\frac{a}{f}$ per il prodotto A delle date ragioni componenti, il quoto B ſarà la ragione cercata.

Altro metodo. 1.º Se la ragione $\frac{a}{f}$ è compoſta di due ragioni, una delle quali ſia $\frac{c}{d}$, ſi faccia $c:d::a:\frac{ad}{c}=p$; ſarà $\frac{p}{f}$ l'altra ragione componente; oppure $d:c::f:\frac{cf}{d}=q$, ſarà $\frac{a}{q}$ la ragione cercata.

2.º Se la ragione $\frac{a}{f}$ è compoſta di tre ragioni, due delle quali ſiano date; ſi faccia $\frac{p}{q}$ compoſta delle due date, e quindi $p:q::a:\frac{aq}{p}=r$, oppure $q:p::f:\frac{pf}{q}=s$, ſarà $\frac{r}{f}$, o $\frac{a}{s}$ la ragione cercata.

3.º Ed in generale; qualunque ſia il numero delle ragioni componenti, ſi chiami A la ragione compoſta delle date, e B la ragione, che ſi cerca; ſi ſarà ſempre nel caſo, in cui data la compoſta AB, ed una delle componenti A, ſi cerca B.

46. Data la ragione compoſta $\frac{a}{f}$, ed una delle componenti A, trovare la ragione B compoſta delle altre.

E' chiaro, che B comunque compoſta, è una delle componenti di $\frac{a}{f}$; e che perciò ſi riduce il preſente problema al precedente.

47. Variare all' infinito la più ſemplice eſpreſſione d'una ragione comunque compoſta.

1.º Si può prendere qualunque antecedente delle ragioni componenti per antecedente della ragione equivalente alla data.

Se

Se ſien date $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}\times\frac{g}{h}$, e ſi voglia a per antecedente della ragione compoſta, ſi faccia $c:d::b:\frac{bd}{c}=p$, ed $e:f::p:\frac{fp}{e}=q$, indi $g:h::q:\frac{qh}{g}=r$; ſarà $\frac{a}{r}$ la ragione equivalente alla data.

2.º Si può prendere per conſeguente della ragione compoſta qualunque conſeguente b delle ragioni, che compongono la data, e facendo $d:c::a:\frac{ac}{d}=p$; ed $f:e::p:\frac{ep}{f}=q$, e finalmente $h:g::q:\frac{gq}{h}=r$, ſarà $\frac{r}{b}$ la ragione cercata.

3.º Si può prendere qualunque quantità n per antecedente, o per conſeguente della cercata; ſi avrà $a:b::n:\frac{bn}{a}=p$; e $c:d::p:\frac{dp}{c}=q$, indi $e:f::q:\frac{fq}{e}=r$; e finalmente $g:h::r:\frac{hr}{g}=s$, ed $\frac{n}{s}$ ſarà la ragione cercata.

Delle ragioni, e proporzioni aritmetiche.

48. Oltre il modo di paragonare una quantità all' altra dello ſteſſo genere per mezzo della diviſione, ve n' ha un altro, che ſi fa colla ſottrazione; quando ſi cerca la ragione di contenenza d'una quantità in un' altra, quella ragione, come detto è, ſi chiama ragione geometrica, e quando ſi cerca la ragione di differenza d'una all' altra quantità, quella ragione ſi chiama *ragione aritmetica*: e ſiccome la proporzione geometrica è un' ugualianza di due ragioni geometriche, così la *proporzione aritmetica* è un' ugualianza di due ragioni aritmetiche; onde in amendue le proporzioni ſi può uſare lo ſteſſo

M ſegno

segno per separare una ragione dall' altra. Per essere più uniformi ne' segni, che separano i termini della ragione aritmetica, pare, che si dovrebbe usare nelle aritmetiche ragioni il segno della sottrazione, siccome nelle geometriche si usa quello della divisione; ma è più in uso il separargli con un sol punto; cui dalla natura delle quistioni s'intenderà non essere segno di multiplicazione; finalmente, è chiaro, che la ragione, e la proporzione aritmetica così disegnata, si potrà leggere come la geometrica, col noto *sta*, *come*.... Ciò basta per far comprendere cosa sia antecedente, conseguente, termine omologo, analogo.... d'una ragione, o proporzione aritmetica.

49. Per le ragioni aritmetiche, si noti. 1.° Che anche in esse si possono considerare le ragioni composte; Si può dire, a cagione d'esempio, che la ragione aritmetica di 15 a 9, è composta delle tre ragioni di 15 a 12, di 6 a 4, e di 10 a 9. 2.° Che nelle ragioni aritmetiche si possono considerare le ragioni doppie, triple...., appunto come nelle geometriche si considerano le dupplicate, triplicate... La ragione geometrica di 8 a 2 è dupplicata della ragione geometrica di 8 a 4, e del pari la ragione aritmetica di 8 a 2 è doppia della ragione aritmetica di 8 a 5.

50. Per le proporzioni aritmetiche. La proposizione fondamentale si è, che se $a.b = c.d$, sarà $a+d = b+c$; e se $a+d = b+c$, sarà $a.b = c.d$; cioè, che in quattro termini aritmeticamente proporzionali la somma degli estremi è eguale alla somma de' medj, e se in quattro termini la somma degli estremi è eguale alla somma de' medj, que' quattro termini sono aritmeticamente proporzionali. Tutto è evidente; avendosi dalla deffinizione, che se $a.b = c.d$, sarà $a-b = c-d$, e trasponendo il b, ed il d, sarà $a+d = b+c$; e se $a+d = b+c$, trasponendo il b, ed il d, sarà $a-b = c-d$, donde $a.b = c.d$.

51. Quindi nella proporzione aritmetica continua la somma degli estremi è eguale al doppio di quel di mezzo; e se in tre termini, la somma degli estremi è eguale al doppio di quel di mezzo, que' tre termini sono in aritmetica proporzione continua. Ciò è evidente dalla dimostrazione precedente, è dalla trasformazione della precedente equazione; Si faccia $b = c$, sarà $a+d = 2b = 2c$, e se $a+d = 2c$, sarà $a-c = c-d$, cioè $a.c = c.d$.

52. Si noti sulle proporzioni aritmetiche, che si possono in esse usare que' modi d'argomentare, che si sono esposti al n. 13. per le proporzioni geometriche. Se $a.b = c.d$, sarà alternando $a.c = b.d$... ec. Allo stesso modo si possono applicare alle ragioni aritmetiche ineguali la proprietà delle ineguali ragioni geometriche, o semplici, o composte.

53. Quindi si ha la soluzione di tutti i problemi, che dipendono dalle proporzioni aritmetiche. Dati tre termini d'una proporzione aritmetica discreta, trovare il quarto; dati due termini d'una proporzione aritmetica continua, trovare il terzo .... ec. Nella proporzione discreta, la somma de' termini non analoghi meno il dato termine analogo al cercato è eguale al termine cercato; nella proporzione continua la metà della somma de' termini estremi è eguale al termine di mezzo; il doppio del termine di mezzo meno uno degli estremi è eguale all'altro estremo... ec.

Delle proporzioni armoniche, e contro-armoniche.

54. SE tre date quantità, o piuttosto numeri, a, b, c siano così disposte, che la prima stia alla terza, geometricamente come la differenza tralla prima, e la seconda, sta alla differenza tralla seconda, e la terza, ossia, che $a:c :: a-b : b-c$, quelle tre quantità sono in proporzione *armonica continua*. Se quattro quantità a, b, c, d siano tali, che $a:d :: a-b : c-d$, quelle quattro quantità sono in proporzione *armonica discreta*. Se tre quantità a, b, c sieno tali, che $c:a :: a-b$:

$b : b - c$, o ſe quattro quantità a, b, c, d ſieno tali, che $d : a :: a - b : c - d$, quelle quantità ſono in proporzione *contro-armonica*, o continua, o diſcreta.

55. L'uſo principale di queſte analogìe, è di trovare uno de' termini della proporzione armonica, o contro-armonica, di cui ſiano dati gli altri. Multiplicando gli eſtremi, ed i medj di ciaſcuna delle quattro precedenti analogìe, e liberando coi metodi noti ciaſcuna lettera, ſi ha

1.° Per le proporzioni armoniche continue

$$a = \frac{bc}{2c - b}$$

$$b = \frac{2ac}{a + c}$$

$$c = \frac{ab}{2a - b}$$

2.° Per le proporzioni armoniche diſcrete

$$a = \frac{bd}{2d - c}$$

$$b = \frac{(2d - c)a}{d}$$

$$c = \frac{(2a - b)d}{a}$$

$$d = \frac{ac}{2a - b}$$

3.° Per le proporzioni contro-armoniche continue

$$a = \frac{1}{2}b \pm \sqrt{(b - c)c + \frac{1}{4}b^2}$$

$$b = \frac{a^2 + c^2}{a + c}$$

$$c = \frac{1}{2}b \pm \sqrt{(b - a)a + \frac{1}{4}b^2}$$

4.° Per

4.° Per le proporzioni contro-armoniche diſcrete

$$a = \frac{1}{2}b + \sqrt{(c - d)d + \frac{1}{4}b^2}$$

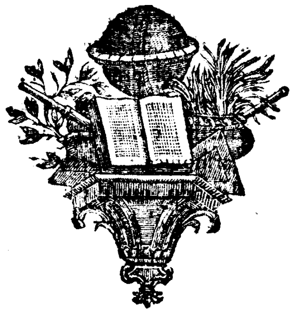
$$b = \frac{(d - c)c}{a} - a$$

$$c = \frac{(a - b)a}{d} + d$$

$$d = \frac{1}{2}c \pm \sqrt{(b - a)a + \frac{1}{4}c^2}$$

56. Paragonando ciaſcun valore de' termini d'una proporzione armonica, o contro-armonica, col valore de' termini d'una proporzione aritmetica, ſi ſcopriranno molte eleganti proprietà comuni a queſti due generi di proporzioni. A cagione d'eſempio, per le proporzioni armoniche continue. 1.° Se a, b, c ſiano in proporzione aritmetica continua, ſaranno ab, ac, bc in continua proporzione armonica; dacchè, ſe $a . b = b . c$, ſarà $a + c = 2b$, e multiplicando queſt' equazione per abc, ſi ha $a^2bc + abc^2 = 2ab^2c$, oſſia $a^2bc - ab^2c = ab^2c - abc^2$; cioè $ab(ac - bc) = bc(ab - ac)$; donde $ab : bc :: ab - ac : ac - bc$.
2.° Se ſi divida una ſteſſa quantità per altre quantità, che ſiano
in continua proporzione armonica, i quozienti ſaranno in con-
tinua proporzione aritmetica; dacchè, ſe a, b, c ſono in conti-
nua proporzione armonica, ſarà $b = \frac{2ac}{a + c}$; dunque dividendo
qualunque quantità d per a, b, c, oſſia per a, $\frac{2ac}{a + c}$, c, ſi avrà
$\frac{d}{a}$, $\frac{ad + dc}{2ac}$, $\frac{d}{c}$, e $2\frac{(ad + dc)}{2ac} = \frac{d}{a} + \frac{d}{c}$.
3.° Allo ſteſſo modo ſi dimoſtra, che dividendo una quantità
per altre, che ſiano in continua proporzione aritmetica, i quo-
zienti ſaranno in continua proporzione armonica, donde ſi ri-
cava

cava, che invertendo i termini di una delle proporzioni armonica, ed aritmetica, col formare frazioni, che abbiano l'unità per numeratore, ed i detti termini per denominatore, l'una si trasforma nell'altra.



CAPO SECONDO.

Delle progressioni Geometriche, ed Aritmetiche.

Progressioni Geometriche.

57. *Progressione geometrica*, significa una serie di termini in continua proporzione geometrica; si nota all'istesso modo, come la proporzione continua, oppure col segno $\div\div$ messole verso la sinistra, con un punto di separazione d'un termine dall'altro. Già si vede, che ciascun termine della progressione geometrica fuori del primo, è conseguente, e che ciascuno, fuori dell'ultimo, è antecedente, e che chiamando s la somma di tutti i termini, b il primo, t l'ultimo termine; Sarà $s-b$ la somma di tutti i conseguenti, ed $s-t$ la somma di tutti gli antecedenti termini della progressione. Conviene distinguere la progressione geometrica *ascendente*, dalla *descendente*; in quella i termini vanno successivamente crescendo da sinistra a destra, ed in questa vanno sempre scemando; nella prima si chiama *ragion comune* della progressione l'esponente della ragione d'un termine qualunque diviso per quello, che lo precede verso la sinistra; la *ragion comune* della seconda progressione, è l'esponente della ragione d'un termine qualunque diviso, per quello, che gli vien dopo verso la destra. Noi parleremo solamente della progressione ascendente, essendo facile l'applicare le proprietà di questa progressione alla descendente, o col rovesciar tutti i termini della progressione, o col cambiare alcuni segni nelle formole, che anderemo esponendo.

58. Prima proposizione fondamentale. Se a è la ragione comune della progressione, ed m il numero, che esprime il sito, che occupa nella progressione un certo termine t, o (che è lo stesso)

stesso) se m esprime il numero de' termini della progressione, sara $t = b\,a^{m-1}$.

Dim. Nella progressione $\ddot{\div}\, b.c.d.e\ldots\ldots t$, si ha $\frac{c}{b} = a$, cioè $c = a\,b$; ed essendo $b:c::c:d$, ossia $b:ab::ab:d$, sarà $d = a^2\,b$; così pure dall' analogia $c:d::d:e$, ossia $ab:a^2\,b::a^2\,b:e$, sarà $e = a^3\,b$; e così nel resto; disponendo in ordine i valori di ciascun termine, si ha

il secondo.... $c = b\,a^1$
il terzo....... $d = b\,a^2$
il quarto...... $e = b\,a^3$
il m^{esimo}....... $t = b\,a^{m-1}$.

59. Seconda proposizione fondamentale. In qualunque progressione geometrica la somma degli antecedenti sta alla somma de' conseguenti, come qualunque antecedente b' sta al suo conseguente c'; cioè $s-t:s-b::b':c'$.

Dim. Per la natura della progressione, si ha $\frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e} = \ldots$ ec.; dunque (num. 18.) $\frac{b+c+d+\ldots \text{ ec.}}{c+d+e+\ldots \text{ ec.}} = \frac{d}{e} = \frac{c}{d} = \ldots\ldots \frac{b'}{c'}$.

60. Dalla prima proposizione fondamentale si hanno le seguenti sei proposizioni. 1.ª Dato il primo termine b, e la ragione comune a d'una progressione geometrica, si possono trovare tutti gli altri, o qualunque degli altri termini della medesima.

La formola $t = b\,a^{m-1}$, rappresenta ciascun termine m^{esimo} della progressione; onde se si voglia in particolare un termine d'una tale determinata classe, o sito, si faccia m eguale al numero, che lo indica; se si vogliano successivamente tutti i termini della progressione, si faccia successivamente m eguale ad 1. 2. 3. 4... ec.

61. 2.ª proposizione. Qualunque progressione geometrica, che incomincia da b, ed ha a per ragione comune, è rappresentabile per $\ddot{\div}\, b.\,b\,a.\,b\,a^2.\,b\,a^3\ldots$ ec.

62. 3.ª Dato il primo termine b, l'ultimo t, e la ragione comune a, si ha il numero m de' termini inclusivamente l'ultimo; e dato il primo termine b, l'ultimo termine t, ed il numero de' termini m, si ha la ragione comune a.

Dacchè 1.º si multiplichi per $\frac{a}{b}$ ciascun membro dell' equazione $t = b\,a^{m-1}$; si ha $\frac{t\,a}{b} = a^m$: Si alzi a alla potenza prima, seconda, terza..... fino ad avere un numero eguale a $\frac{t\,a}{b}$; l'esponente di questa potenza sarà il valore di m.

2.º Si divida l'equazione medesima per b; si ha $\frac{t}{b} = a^{m-1}$, ed estraendo la radice $m-1$; si ha $a = \sqrt[m-1]{\frac{t}{b}}$.

63. 4.ª Se r è il numero de' termini interposti tra due qualunque dati termini d'una progressione geometrica, il termine maggiore, sta al minore in ragione $(r+1^{plicata})$ della ragione comune.

Così $\frac{b\,a^2}{b} = a^2$; $\frac{b\,a^3}{b} = a^3$.... ec., cioè, se tra i due termini dati se ne è ommesso uno, il maggiore sta al minore in ragione dupplicata di a; se se ne sono ommessi due, il maggiore sta al minore in ragione triplicata... ec.; dacchè ciascuna di queste ragioni è composta d'un numero $r+1$ di eguali ragioni intermedie.

64. 5.ª Se $b\,a^s$, $b\,a^r$ siano termini della progressione geometrica, distanti l'uno dall' altro $r-s$, e $b\,a^p$, $b\,a^{p+1}$ siano due altri termini qualunque tra se vicini, sarà $b\,a^r : b\,a^s :: b^{r-s}\,a^{p\,(r-s)} : b^{r-s}\,a^{(p+1)\,(r-s)}$.

Dac-

Dacchè l'esponente delle due ragioni è sempre a^{r-1}. Così, per esempio, il primo termine d'una progressione geometrica sta al terzo, come il quadrato del primo sta al quadrato del secondo termine; il primo termine sta al quarto, come il cubo del primo sta al cubo del secondo; il terzo sta al nono, come la sesta potenza di qualunque antecedente, sta alla sesta potenza del suo conseguente.... ec.

65. 6.ª Tra due quantità b, t trovare un numero r di medj geometricamente proporzionali.

E' evidente, che se si troverà il primo de' cercati medj proporzionali, si troveranno, per il num. 58., tutti gli altri: Sia adunque x il primo de' medj cercati; Sarà per il num. precedente $t:b::x^{r+1}:b^{r+1}$; dunque 1.° $tb^{r+1}=bx^{r+1}$

$$2.° \quad tb^r = x^{r+1}$$

$$3.° \quad \sqrt[r+1]{tb^r} = x$$

66. Dalla seconda proposizione fondamentale si ha; 1.°, dividendo, $c'-b':b'::t-b:s-t$; cioè in una progressione geometrica qualunque termine meno il precedente sta al precedente, come l'ultimo meno il primo sta alla somma di quegli, che precedon l'ultimo.

67. 2.° E se $c'=nb'$, sarà $nb'-b':b'::t-b:s-t$; cioè $(n-1)b':b'::t-b:s-t$; donde $t-b=\frac{(n-1)b'(s-t)}{b'}$ $=(n-1)(s-t)$; cioè, se in una progressione geometrica il secondo termine sia n^{plo} del primo (o come altri dicono più acconciamente, se regni nella progressione la ragione n^{pla}); la differenza de' termini estremi sarà $(n-1)^{pla}$ della somma de' termini, che precedon l'ultimo.

68. 3.° Dati il primo, e l'ultimo termine, con due altri termini qualunque tra se vicini; oppure, data la ragion comune, ed il primo, e l'ultimo termine; o dato il numero de' termini, il primo termine, e la ragion comune d'una progressione geometrica; o finalmente dato il primo, e l'ultimo termine, ed il numero de' termini; si ha la somma di tutti i termini; cioè

$$1.° \quad s=\frac{c't-b'b}{c'-b'}$$

$$2.° \quad s=\frac{at-b}{a-1}$$

$$3.° \quad s=b\frac{a^m-1}{a-1}$$

$$4.° \quad s=\frac{t^{\frac{m}{m-1}}-b^{\frac{m}{m-1}}}{t^{\frac{1}{m-1}}-b^{\frac{1}{m-1}}}$$

Dacchè 1.° multiplicando gli estremi, ed i medj dell' analogia, si ha $s(c'-b')=c't-b'b$, donde $s=\frac{c't-b'b}{c'-b'}$.

2.° Se b', c' fossero i primi due termini b, c della progressione, cioè fossero b, ba, sarebbe $s=\frac{bat-b^2}{ba-b}=\frac{at-b}{a-1}$.

3.° Sostituendo invece di t il suo valore ba^{m-1}, sarebbe $s=\frac{ba^{m-1}\,a-b}{a-1}=b\frac{a^m-1}{a-1}$.

Finalmente 4.° per essere $a=\sqrt[m-1]{\frac{t}{b}}=\frac{t^{\frac{1}{m-1}}}{b^{\frac{1}{m-1}}}$

Si ha $a - 1 = \dfrac{t^{\frac{1}{m-1}}}{b^{\frac{1}{m-1}}} - 1 = \dfrac{t^{\frac{1}{m-1}} - b^{\frac{1}{m-1}}}{b^{\frac{1}{m-1}}}$

$$a^m = \frac{t^{\frac{m}{m-1}}}{b^{\frac{m}{m-1}}}$$

$$a^m - 1 = \frac{t^{\frac{m}{m-1}} - b^{\frac{m}{m-1}}}{b^{\frac{m}{m-1}}}$$

donde $s = b\,\dfrac{a^m - 1}{a - 1} = \dfrac{t^{\frac{m}{m-1}} - b^{\frac{m}{m-1}}}{t^{\frac{1}{m-1}} - b^{\frac{1}{m-1}}}$

69. 4.° Dividendo l'equazione $s = b\,\dfrac{a^m - 1}{a - 1}$ per $\dfrac{a^m - 1}{a - 1}$, si ha $b = s\,\dfrac{a - 1}{a^m - 1}$, cioè, data la somma, il numero de' termini, e la ragion comune, si ha il primo termine della progressione.

70. 5.° Sostituendo nella formola $t = b\,a^{m-1}$, questo valore di b, si ha l'espressione generale di qualunque termine, data la somma, il numero de' termini, e la ragion comune, cioè $t = s\,\dfrac{a^m - a^{m-1}}{a^m - 1}$.

71. 6.° Si può avere la ragion comune della progressione, data la somma degli antecedenti, e de' conseguenti; dacchè $b : ba :: s - t : s - b$, donde $bs - b^2 = bas - bat$, ossia $s - b = as - at = a(s - t)$; cioè $a = \dfrac{s - b}{s - t}$.

72. Le premesse due proposizioni fondamentali, ed i corollarj da esse dedotti sono fecondissimi d'altre proposizioni, che ciascuno, confrontando ciascuna formola con tutte le altre, potrà da se dedurre senza pena. Si ha a cagione d'esempio

$$b = s + at - as = s + (t - s)\,a$$

$$t = \frac{as + b - s}{a} = \frac{(a - 1)\,s + b}{a}$$

e dal num. 65. si può compire una progressione geometrica, di cui non sia dato, che il primo, ed un altro termine qualunque, col numero de' termini intermedj; basta fare r eguale al numero degli intermedj, e si avrà x secondo termine della progressione; e fatto $m = r + 2, \ldots$ sideterminerà successivamente la formola $t = b\,a^{m-1}$.

Delle progressioni Aritmetiche.

73. Progressione *aritmetica*, significa una serie di termini in continua proporzione aritmetica: Si nota allo stesso modo come la proporzione aritmetica, o col segno $\div$ messole verso la sinistra, ed un punto di separazione tra un termine, e l'altro. Anche la progressione aritmetica può essere ascendente, o discendente; tratterò solo dell' ascendente. Nell' articolo precedente mi sono steso più forse del bisogno a svolgere con parole le formole algebraiche, che danno le dimostrazioni de' teoremi, e le soluzioni de' problemi sulle progressioni geometriche; ho giudicato di doverlo fare, per avvezzare il lettore anche in questa materia delle progressioni a penetrare lo stato, e le condizioni della quistione col solo contemplare attentamente le formole: Non sarà uopo di tanto in quest' articolo, nel quale ciascuno potrà dedurre (come detto è per le progressioni geometriche) delle nuove formole, che qui ommetto per essere, o troppo facili, o meno necessarie.

74. Proposizione fondamentale. Se b è il primo termine, a la differenza, o la ragione comune, m il numero, che esprime il sito d'un termine qualunque, o il numero de' termini della progressione, fino ad esso inclusivamente, sarà $t = b + (m - 1) a$.
Dim. Nella progressione aritmetica $\div b . c . d . e . f \ldots . . t$; si ha $c - b = a$, cioè $c = b + a$, ed essendo $b . c = c . d$, ossia $b . b + a = b + a . d$, sarà $d = b + 2 a$.. ec.;
cioè il primo termine essendo b

il secondo è $b + a$

il terzo è $b + 2 a$

il m^{esimo} è $b + (m - 1) a$

75. Seconda proposizione fondamentale. Se t è l'ultimo termine, ed s la somma di tutti i termini della progressione aritmetica, sarà 1.° $t - b = m a - a$

2.° $2 s = m b + m t$

La prima formola è evidente, trasponendo il b della formola del num. 74., la seconda si dimostra così: Nella progressione aritmetica $\div b . c . d . e . k . t$, per la deffinizione si ha $b . c = k . t$,
$b . d = e . t$
dunque $b + t = c + k$
$b + t = d + e$; cioè $2 (b + t) = (c + k) + (d + e)$, e $3 (b + t) = s$, donde $6 (b + t) = 2 s$; ma 6 è il numero m de' termini della progressione, dunque $m (b + t) = 2 s$.

76. Dalla formola del num. 74.; 1.° Dato il primo termine b della progressione aritmetica, e la differenza comune a, si possono trovare successivamente tutti gli altri termini, o qualunque termine della progressione.
Si faccia nella formola di t, la lettera m eguale all' esponente del sito, che deve occupare il termine cercato; o se si vogliano successivamente tutti gli altri termini della progressione dopo b, si faccia m successivamente eguale a 2 . 3 . 4 . 5 ... ec.

77. 2.° Qualunque progressione aritmetica, che incomincia da b, ed ha a per differenza comune, si può rappresentare da $\div b . b + a . b + 2 a . b + 3 a \ldots$ ec.

78. 3.° Tra due dati termini t, b trovare un numero r di medj t aritmeticamente proporzionali.
Si divida la differenza $t - b$ per $r + 1$; il quoziente sarà l'a della progressione, con cui, per il num. 74., si troveranno tutti i termini della medesima. Dacchè se si cerca un numero r di termini intermedj, compiuta che sia la progressione, si dovranno avere $r + 1$ differenze, e tutte tra se eguali, la cui somma deve equivalere a $t - b$; dunque ciascuna di queste sarà $\frac{t - b}{r + 1}$.

79. Colle formole del num. 75. si sciolgono tutti i problemi, che appartengono alle progressioni aritmetiche. In ciascuna di quelle formole si contengono quattro lettere; liberando adunque co' noti metodi ciascuna di queste, si avrà il suo valore, colle altre tre; cioè in tutto si avranno otto formole per gli m, a, b, t, s. Sostituendo nella seconda formola il valore di t, di a, e di m presi dalla prima, si avranno tre altre formole di quattro lettere per ciascuna, da ciascuna di queste si dedurranno, come prima, quattro nuove formole, cioè in tutto dodici formole, che colle prime otto daranno venti formole, che comprendono tutti i casi possibili delle progressioni aritmetiche. Il problema generale, che comprende tutti questi venti casi è *dati i valori di tre lettere m, a, b, t, s, trovare il valore di ciascuna delle altre due*.

80. Facendo il calcolo accennato nel num. precedente, si ha

Prima formola	Seconda formola
$t - b = m a - a$	$2 s = m b + m t$
I. $b = t - (m - 1) a$	I. $b = \frac{2 s}{m} - t$
II. $t = b + (m - 1) a$	II. $t = \frac{2 s}{m} - b$
III. $a = \frac{t - b}{m - 1}$	III. $s = \frac{m}{2} (b + t)$
IV. $m = 1 + \frac{t - b}{a}$	IV. $m = \frac{2 s}{b + t}$

Seconda formola,
traſformata col valore di t preſo dalla prima

$$2s = 2mb + m^2 a - ma$$

I. $b = \frac{1}{m} s - \frac{m-1}{2} a$

II. $a = \frac{2(s - mb)}{m . \overline{m-1}}$

III. $s = mb + \frac{m . \overline{m-1}}{2} a$

IV. $m = \frac{1}{2} - \frac{b}{a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{a^2} + \frac{2s - b}{a} + \frac{1}{4}}$

Seconda formola,
traſformata col valore di m preſo dalla prima

$$2s = b + t + \frac{t^2 - b^2}{a}$$

I. $b = \frac{1}{2} a \pm \sqrt{(t + a) t - (2s - \frac{1}{4} a) a}$

II. $t = -\frac{1}{2} a \pm \sqrt{(b - a) b + (2s + \frac{1}{4} a) a}$

III. $a = \frac{t^2 - b^2}{2s - b - t}$

IV. $s = \frac{b - t}{2} + \frac{t^2 - b^2}{2a}$

Seconda formola,
traſformata col valore di a preſo dalla prima

$$2s = 2mt - m^2 a + ma$$

I.ª

I. $t = \frac{1}{m} s + \frac{m-1}{2} a$

II. $a = \frac{2(mt - s)}{m . \overline{m-1}}$

III. $s = mt - \frac{m . \overline{m-1}}{2} a$

IV. $m = \frac{1}{2} + \frac{t}{a} \pm \sqrt{\frac{t^2}{a^2} - \frac{2s + t}{a} + \frac{1}{4}}$

81. Combinando inſieme queſte formole ſi trovano quattro valori per ciaſcuna delle cinque lettere m, a, b, t, s

I. $m = 1 + \frac{t - b}{a} = \frac{2s}{b + t}$

$= \frac{1}{2} - \frac{b}{a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{a^2} + \frac{2s - b}{a} + \frac{1}{4}}$

$= \frac{1}{2} + \frac{t}{a} \pm \sqrt{\frac{t^2}{a^2} - \frac{2s + t}{a} + \frac{1}{4}}$

II. $a = \frac{t - b}{m - 1} = 2 \frac{s - mb}{m . \overline{m-1}}$

$= \frac{t^2 - b^2}{2s - b - t} = 2 \frac{mt - s}{m . \overline{m-1}}$

III. $b = t - (m - 1) a = \frac{2s}{m} - t = \frac{1}{m} s - \frac{m-1}{2} a$

$= \frac{1}{2} a \pm \sqrt{(t + a) t - (2s - \frac{1}{4} a) a}$

O IV.ª

$$\text{IV.}\quad t = b + (m-1)a = \frac{2s}{m} - b = \frac{1}{m}s + \frac{m-1}{2}a$$

$$= -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(b+a)b + \left(2s + \frac{1}{4}a\right)a}$$

$$\text{V.}\quad s = \frac{m}{2}(b+t) = mb + \frac{m\,.\,\overline{m-1}}{2}a$$

$$= \frac{b-t}{2} + \frac{t^2-b^2}{2a} = mt - \frac{m\,.\,\overline{m-1}}{2}a.$$

Paragone delle due progressioni, Goometrica, ed Aritmetica.

82. PAragonando insieme le formole dedotte dalle proprietà delle proporzioni, e progressioni geometriche, ed aritmetiche, si vede 1.° Che l'addizione, e la sottrazione nelle proporzioni, e progressioni aritmetiche, fanno ciò, che nelle proporzioni, e progressioni geometriche si ottiene colla multiplicazione, e colla divisione.

2.° Che nelle proporzioni, e progressioni aritmetiche si fa colla multiplicazione, e colla divisione ciocchè nelle proporzioni, e progressioni geometriche si fa colla formazione, e colla risoluzione delle potenze.

3.° Che la differenza, o la ragione comune de' termini d'una proporzione, e progressione aritmetica tiene luogo della ragione comune nella geometrica.

A cagione d'esempio, per trovare l'ultimo termine t d'una progressione aritmetica, dato il primo termine b, la differenza comune a, ed il numero m de' termini, si multiplica la differenza comune a col numero de' termini $m-1$, e si aggiunge al prodotto il primo termine b; e nella progressione geometrica, si ha il t alzando alla potenza $m-1$ la ragion comune a, e multiplicando a^{m-1} per il primo termine b.

83. Tutte le proprietà delle proporzioni geometriche, ed aritmetiche si potevano dedurre dalla espressione de' conseguenti per mezzo degli antecedenti, e della ragione comune fatta eguale ad a; invece di $a:b::c:d$, e di $a.b::c.d$ si poteva prendere $a:ab::c:ac$, e $b.b+a::c.c+a$; o, unendo in una queste due espressioni, fare $b;\, b \overset{\times}{+} a::c;\, c \overset{\times}{+} a$. Non abbiamo scelta questa strada, che pure sembra più semplice, per dare luogo agli artificj analitici, e l'accenniamo qui per dare materia di calcolo a chi vorrà contemplare la teoria delle proporzioni anche sotto quest' aspetto.

84. Nelle progressioni. 1.° Non s'impiegano più di due lettere diverse, b, a, varie volte a se stesse aggiunte, o multiplicate insieme; la progressione aritmetica si riduce sempre a $b.\, b+a.\, b+2a.\, b+3a \ldots$ ec., e la geometrica a $b.\, ba.\, ba^2\, ba^3 \ldots$ ec.

2.° I coefficienti di a nella progressione aritmetica sono gli stessi, che gli esponenti di a nella geometrica, termine per termine, ed oltre a ciò formano la serie naturale $1.2.3.4\ldots$ ec., o se si faccia il primo termine della progressione aritmetica eguale a $b+0a$, e della geometrica ba^0, formano la serie naturale $0.1.2.3.4\ldots$ ec.

3.° Quindi dato il primo termine b, e la ragione comune a delle due progressioni, si ha un facile compendio per formarle, e continuarle all' infinito. Per la progressione aritmetica basta multiplicare la ragione, o differenza comune a successivamente per i termini della serie naturale $0.1.2.3\ldots$ ec., ed a ciascun prodotto aggiungere il primo termine b. Per la progressione geometrica basta alzare a successivamente alle potenze espresse dalla serie naturale $0.1.2.3.4\ldots$ ec., e multiplicare di mano in mano queste potenze per b.

4.° Nella progressione aritmetica, può supporsi b eguale a zero, non così nella geometrica; dacchè fatto $b=0$ in quella si avrebbe tuttavia la progreſſione $\div$ o . a . $2a$. $3a$ ... ec., ed in queſta ſi avrebbe una ſerie di zeri.

5.° Nella progreſſione aritmetica può ſupporſi $a = 1$, non così nella geometrica; e nè in quella, nè in queſta può a eſſere eguale a zero. Se $a = 1$, ſi ha $\div\ b \,.\, b+1 \,.\, b+2$ ..... ec., ſe $a = 0$, ſi ha $b . b . b$ ... ec., che è una ſerie di quantità eguali; e nelle progreſſioni geometriche, ſe $a = 1$, ſi ha $b . b . b$ ... ec., ſerie di quantità eguali, e ſe $a = 0$, ſi ha una ſerie di zeri.

6.° Quindi la progreſſione aritmetica può avere qualche termine eguale a zero, non così la geometrica: nella progreſſione aritmetica allora ſolamente vi ſarà un termine eguale a zero, quando uno de' termini ſarà multiplo della ragione comune.

85. Infinite ſono le oſſervazioni di ſimil genere, che ſi poſſono fare ſulle due progreſſioni; tra tutte però, le più intereſſanti s'aggirano ſulla progreſſione geometrica, in cui ſi ſupponga $b = 1$; ſi ha $\ddot{\div}\ a^0 . a^1 . a^2 . a^3$ .... ec., che è la ſerie delle potenze di a. Su queſta ſerie ſi noti. 1.° Che ſe preſo a^0 per primo termine della progreſſione, il ſecondo non foſſe a^1, ma $\frac{1}{a^1} = a^{-1}$, ſi avrebbe $\ddot{\div}\ a^0 . a^{-1} . a^{-2} . a^{-3}$ ... ec.

2.° Che ſi poſſono ordinare queſte due progreſſioni, di modo che ne compongano una ſola; ſi avrà

ec. .... $a^{-4} . a^{-3} . a^{-2} . a^{-1} . a^0 . a^1 . a^2 . a^3 . a^4$ .... ec.

3.° Che in queſta nuova progreſſione, il termine di mezzo a^0 è il limite comune donde partono le due progreſſioni, una verſo la deſtra, l'altra verſo la ſiniſtra; la ragione d'un termine qualunque al ſuo vicino verſo la deſtra è $\frac{1}{a}$, e gli eſponenti partendo del limite comune formano la ſerie de' numeri naturali, ma andando verſo la deſtra ciaſcun termine di queſta ſerie ha il ſegno $+$, andando verſo la ſiniſtra, hanno il ſegno $-$.

4.° Che

4.° Che quindi la ſerie, che ſta alla ſiniſtra di a^0 è inverſa di quella, che vi ſta a deſtra: il ſecondo termine verſo la deſtra dopo a^0 è a^2, ed il ſecondo termine dopo a^0 verſo la ſiniſtra è $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$: il terzo termine... ec.

86. Quindi. 1.° Nella progreſſione delle potenze di a d'eſponente poſitivo la ſeconda potenza di a occupa il ſecondo ſito, o la ſeconda claſſe dopo a^0; e generalmente, la potenza $m^{eſima}$ ſta alla claſſe $(m+1)^{eſima}$, incominciando da a^0; ed eſſendo il termine $(m+1)^{eſimo}$ d'una progreſſione geometrica affatto lo ſteſſo del $(m+1)^{eſimo}$ continuamente proporzionale dopo il primo, ed il ſecondo termine, la potenza m di a è la $(m+1)^{eſima}$ continuamente proporzionale all' unità, ed al dato a. Ciò vale ancora per le potenze d'eſponente negativo.

2.° Collo ſteſſo diſcorſo ſi vede, che nella ſerie delle potenze di a, il termine a^1, che è radice ſeconda di a^2, è mezzano proporzionale tra a^0, ed a^2, e che generalmente a^1, che è radice $m^{eſima}$ di a^m, è la prima delle $m-1$ proporzionali tra a^0, ed a^m; cioè, che la radice qualunque d'una potenza d'eſponente poſitivo è la prima di tante medie proporzionali tra l'unità, e la potenza data, quante ſono unità (una meno) nell' eſponente della radice cercata.

87. Quindi ancora; 1.° Cercare una potenza d'intero eſponente dato di una data quantità a, è lo ſteſſo, che ſupporre già formata una progreſſione geometrica, il primo termine della quale ſia l'unità, ed il ſecondo ſia la data quantità a, e cercare il termine di queſta progreſſione, che occupa il ſito indicato dall' eſponente della potenza cercata, dopo l'unità non compreſa; o, a dire più corto, cercare la potenza m d'una quantità a è lo ſteſſo, che cercare la $(m+1)^{eſima}$ continuamente proporzionale ad a^0, ed a.

2.° Cercare una radice d'eſponente intero d'una data potenza, è lo è lo stesso, che supporre già formata una progressione geometrica, che incominci dall' unità, di cui sia dato un termine qualunque, ed il sito (indicato dall' esponente), che egli occupa nella medesima, e cercare il primo di tanti medj proporzionali tra l'unità, ed il dato termine, quante sono unità (meno una) nell' esponente dato; o, a dire più in breve, cercare la radice m d'una quantità a è lo stesso, che cercare il primo degli $(m-1)^{esimi}$ medj proporzionali tra a^0, ed a.

88. Quindi finalmente è manifesto, che tanto le radici delle potenze, quanto le potenze stesse d'una data radice sono termini della progressione delle potenze $\div\, a^0 . a^1 . a^2 . a^3 \ldots$ ec.; ciocchè dà una compiuta dichiarazione del chiamarsi dagli Analisti col nome di *potenze* anche le volgari radicali quantità.

89. Ciò dichiarasi viemmeglio dalla natura degli esponenti della progressione delle potenze. La diversità di due termini qualunque di questa progressione non istà, che negli esponenti diversi, da cui vengono affetti; sempre a entra ne' termini della progressione, ma sempre con nuovi, e tra se diversi esponenti, e per compire la progressione di due dati termini, o per introdurre tra due dati termini un numero m di medj proporzionali, basta cercare un numero m di medj aritmeticamente proporzionali tra gli esponenti de' medesimi, e mettergli di mano in mano per esponenti di a. Così per inserire un medio proporzionale tra a^0, ed a^2, si cerchi un medio aritmeticamente proporzionale r tra zero, e 2; si avrà $r=1$, ed a^1 sarà il medio cercato; per inserire tre medj proporzionali tra a^0, ed a^1, si cerchino tre medj aritmeticamente proporzionali tra zero, e l'unità; si avrà $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, ed i medj cercati daranno

$a^0 . a^{\frac{1}{4}} . a^{\frac{1}{2}} . a^{\frac{3}{4}} . a^1$; e col metodo del num. 65., si avrà

$a^0 . \sqrt[4]{a} . \sqrt{a} . \sqrt[4]{a^3} . a^1$;

onde

onde $a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}$, $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$, $a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3}$.

90. L'ultima, e la più insigne proprietà delle progressioni delle potenze è dedotta dalle proprietà delle progressioni aritmetiche, e geometriche, ed è, che la somma, o la differenza degli esponenti di due termini qualunque è l'esponente del prodotto, o del quoto de' medesimi, tra se multiplicati, o divisi. Questa è la proprietà principale de' *logaritmi*, che noi esporremo nel capo seguente, dopo d'avere sciolto il seguente problema.

91. Trovare la ragione, che ha la somma A d'una progressione geometrica, alla somma B d'una progressione aritmetica, posto, che amendue abbiano gl' istessi estremi b, t, e lo stesso numero di termini m.

Si riducano i due valori di A, B a non contenere, che le tre lettere b, t, m. Per la progressione aritmetica si ha (num. 81.) $B = \frac{m}{2}(b+t)$, e per la progressione geometrica si ha (num. 68.)

$$s = \frac{t^{\frac{m}{m-1}} - b^{\frac{m}{m-1}}}{t^{\frac{1}{m-1}} - b^{\frac{1}{m-1}}}$$

$$\text{e perciò } A : B :: \frac{t^{\frac{m}{m-1}} - b^{\frac{m}{m-1}}}{t^{\frac{1}{m-1}} - b^{\frac{1}{m-1}}} : \frac{m}{2}(b+t) ::$$

$$2(t^{\frac{m}{m-1}} - b^{\frac{m}{m-1}}) : m(b+t)(t^{\frac{1}{m-1}} - (b^{\frac{1}{m-1}}) ::$$

$$2(t^{\frac{m}{m-1}} - b^{\frac{m}{m-1}}) : m(t^{\frac{m}{m-1}} - b^{\frac{m}{m-1}}) + m(b t^{\frac{1}{m-1}} - t b^{\frac{1}{m-1}});$$

e fatto

e fatto $t^{\frac{m}{m-1}} - b^{\frac{m}{m-1}} = p$, e $b\,t^{\frac{1}{m-1}} - t\,b^{\frac{1}{m-1}} = q$,

ſi ha $A:B::2p:mp+mq::2p:m(p+q)$

oſſia, $A:B::2\ :m\ +\frac{mq}{p}$.

92. Uſando queſto metodo non ſarà neceſſarlo cercare ſeparatamente le ſomme A, B per avere il loro rapporto, anzi non ſarà neceſſario, che ſia noto alcuno de' termini medj; dati i termini eſtremi, ed il numero de' termini ſi ha la ragione cercata, e finalmente trovata la ragione delle ſomme, e dato l'A, o il B, ſi ha il B, o l'A ſenza altri calcoli, fuori de' conſueti per liberare un termine d'una data analogìa.

93. E' evidente. 1.º Che creſcendo t per rapporto a b, m nell' analogìa ſuperiore, creſce il p, e la ſeconda parte $t\,b^{\frac{1}{m-1}}$ di q; cioè ſi ſcema $\frac{mq}{p}$.

2.º Che creſcendo il ſolo m, creſce $m+\frac{mq}{p}$.

3.º Che l'$m+\frac{mq}{p}$ ſi aumenta più col creſcere di t, che col creſcere di m.

4.º Quindi creſcendo t, o m, ſi ſminuiſce il rapporto di A a B, o, che è lo ſteſſo, creſce il rapporto di B ad A; ma queſti rapporti ſminuiſcono, e creſcono di più col creſcere t, che coll' aumentarſi m.

94. Ciò ſi dichiarerebbe ſempre più ſe prendeſſimo a conſiderare le traſformazioni della formola nel caſo, in cui una delle t, b, m creſceſſe all' infinito per rapporto alle altre: queſte conſiderazioni le può fare ognuno da ſe, eſſendo il calcolo delle quantità infinite affatto lo ſteſſo del calcolo delle finite; noi

per

per a, b... ec. abbiamo ſempre inteſo d'eſprimere qualunque ſorta di quantità, o eſſe ſi ſuppongano finite, o comunque creſciute, o ſcemate all' infinito. Sulle proporzioni degli aſſolutamente infiniti, o infinitamente piccoli, o eſſi vi ſieno, o piuttoſto conducano ad aſſurdi, puoi vedere le ingegnoſe coſe, che ha ſcritte il Fontenelle (Elemens de la Geom. de l'Infini).

CAPO TERZO.

De' Logaritmi.

Natura, e proprietà de' Logaritmi.

95. TRovare l'esponente z della potenza, a cui alzando un numero qualunque a, preso ad arbitrio, si abbia un numero eguale ad un dato y.

A questo problema io riduco con Eulero (Tom. 1. c. 6. dell' introduzione all' Analisi degli infiniti) tutta la teoria de' logaritmi; l'esponente indeterminato z si chiama logaritmo del numero dato y, ed il numero assunto a si chiama *base logaritmica*. Questo problema si scioglie col metodo delle medie, e continuamente proporzionali.

96. In tanto si vede dall' equazione fondamentale $a^z = y$, che disegnando colla lettera l il logaritmo di un dato numero y, si ha 1.° $ly = z$, ed alzando ciascun membro della prima equazione alla potenza d'esponente n, e $-n$ qualunque, si ha

$$a^{nz} = y^n$$
$$a^{-nz} = y^{-n}$$
$$\text{donde } ly^n = nz$$
$$ly^{-n} = -nz$$

2.° Se $lv = x$...... sarà $a^x = v$

$ly = z$ $\qquad$ $a^z = y$, e multiplicando insieme queste due equazioni, si ha $a^{x+z} = vy$, donde $lvy = x + z = lv + ly$, e dividendo una di quelle medesime equazioni per l'altra, si ha $a^{x-z} = \frac{v}{y}$, donde $l\frac{v}{y} = x - z$,

$$\text{cioè } l\frac{v}{y} = lv - ly$$

3.° Fi-

3.° Finalmente, se $y = 1$, sarà $a^z = 1$, cioè $z = 0$, e $l1 = 0$.

97. Quindi rappresentandosi coll' y qualunque numero, 1.° non può a essere eguale, o minore dell' unità, dacchè se esso è un' unità, non potrà mai, qualunque sia l'esponente z, aversi un numero maggiore d'un' unità, e se è una frazione, fuori del caso di $z = 0$, sarà sempre a^z minore dell' unità.

2.° I logaritmi negativi sono logaritmi delle frazioni; i logaritmi positivi sono logaritmi de' numeri interi.

3.° Non si possono avere logaritmi esatti, se non quando y è una potenza perfetta di a; gli altri si hanno per approssimazione.

4.° Come si possono assegnare infiniti valori ad a maggiori dell' unità, infiniti altresì possono essere i sistemi de' logaritmi, dipendenti tutti dalle diverse supposizioni del valore di a.

5.° Quel numero, il cui logaritmo è l'unità, serve sempre di base a qualunque sistema; dacchè, se $z = 1$, deve necessariamente essere $a = y$.

6.° Se quattro termini sono in proporzione geometrica, i loro logaritmi sono in proporzione aritmetica, e se una serie di termini è in progressione geometrica, i loro logaritmi sono in progressione aritmetica; dacchè i logaritmi sono esponenti delle potenze di a, o delle radici di y.

98. Da quest' ultima proprietà de' logaritmi hanno tratta alcuni Autori la deffinizione de' medesimi, dicendo, che i logaritmi sono termini d'una progressione aritmetica, che corrispondono a' termini d'una geometrica progressione. Questa nozione prende i logaritmi in una significazione più astratta, e più generale; ma per l'uso non è uopo di tanto.

99. Si considerino le formole del num. 96.. In qualunque sistema de' nostri logaritmi; 1.° $lvy = lv + ly$. Con questa formola si cambiano tutte le multiplicazioni in semplici addizioni: *Il prodotto di due numeri è il numero, che corrisponde nelle tavole alla somma de' loro logaritmi.*

P 2 $\qquad$ 2.°

2.° $l\frac{v}{y} = lv - ly$. Con questa formola si cambiano tutte le divisioni in semplici sottrazioni: *Il quoto di due numeri è il numero, che corrisponde nelle tavole al logaritmo del dividendo sminuito del logaritmo del divisore.*

3.° $ly^{\pm n} = \pm nz$, ossia $ly^{\pm n} = \pm nly$, per essere $z = ly$. Con questa formola si cambiano le formazioni di tutte le potenze d'esponente positivo, o negativo, alle volte di numeri assai composti, in semplici multiplicazioni di numeri piccoli: *La potenza d'esponente dato di un dato numero, è il numero, che corrisponde nelle tavole al logaritmo del dato numero, ma multiplicato per l'esponente dato.*

4.° $ly^{\pm\frac{1}{s}} = \pm\frac{1}{s}z = \pm\frac{1}{s}ly$ Con questa formola si cambiano l'estrazioni delle radici in semplicissime divisioni: *La radice d'esponente dato d'un dato numero, è il numero, che corrisponde nelle tavole al logaritmo del dato numero, ma diviso per l'esponente dato.*

5.° L'uso di queste quattro formole farà comprendere varj compendj nel calcolo; a cagione d'esempio, per multiplicare un numero intero per una frazione propria, non è necessario cercare prima il logaritmo della frazione, per aggiungerlo al logaritmo del numero intero; basta sottrarre il logaritmo del denominatore della frazione dalla somma de' logaritmi dell' intero, e del numeratore dato; si schiva con ciò una sottrazione, che sempre riesce più difficile dell' addizione; così per dividere un numero intero per una frazione, basta sottrarre il logaritmo del dato numeratore, dalla somma de' logaritmi dell' intero, e del denominatore dato; e così nel resto.

Sarà ora facile il mettere in teoremi le altre formole sui logaritmi, che noi anderemo svolgendo in questo capo.

Me-

Metodi, e compendj di metodi per costruire le tavole de' Logaritmi.

100. DAto B per valore della base a, trovare il logaritmo d'un numero qualunque Z.

Sia $Z = 5$, e nell' equazione $a^x = y$ sia $y = 1$, ed $y = 10$; fatto

$A = 1$, sarà $lA = 0$

$B = 10$ $\quad lB = 1$

cioè Z sta tra A, B. Si cerchi un medio geometricamente proporzionale tra A, B; si avrà $C = \sqrt{AB}$; cioè C eguale a 10 alzato alla potenza, che ha per esponente un medio aritmeticamente proporzionale tra zero, e l'unità: Per evitare le frazioni in questa, ed in simili determinazioni, si metta dopo i termini A, B, ed lA, lB un egual numero di zeri, per esempio sei, o sette; sarà

$A = 1$, 000000 ..... $lA = 0$, 0000000

$B = 10$, 000000 ..... $lB = 1$, 0000000

$C = 3$, 162277 ..... $lC = 0$, 5000000

Il C trovato non è eguale a Z, e sta Z tra C, B. Si determini allo stesso modo un medio geometricamente proporzionale tra C, B; si avrà $D = \sqrt{BC}$, cioè 10 alzato ad una potenza, che ha per esponente un medio aritmetico tra lB, e lC ....., e così si proceda successivamente, come nello schemma seguente, finoacchè uno de' medj proporzionali sia Z.

A

$A = 1,000000 \ldots$	$lA = 0,0000000$	
$B = 10,000000 \ldots$	$lB = 1,0000000$	Sia
$C = 3,162277 \ldots$	$lC = 0,5000000 \ldots$	$C = \sqrt{AB}$
$D = 5,623413 \ldots$	$lD = 0,7500000 \ldots$	$D = \sqrt{BC}$
$E = 4,216964 \ldots$	$lE = 0,6250000 \ldots$	$E = \sqrt{CD}$
$F = 4,869674 \ldots$	$lF = 0,6875000 \ldots$	$F = \sqrt{DE}$
$G = 5,232991 \ldots$	$lG = 0,7187500 \ldots$	$G = \sqrt{DF}$
$H = 5,048065 \ldots$	$lH = 0,7031250 \ldots$	$H = \sqrt{FG}$
$I = 4,958069 \ldots$	$lI = 0,6953125 \ldots$	$I = \sqrt{FH}$
$K = 5,002865 \ldots$	$lK = 0,6992187 \ldots$	$K = \sqrt{HI}$
$L = 4,980416 \ldots$	$lL = 0,6972656 \ldots$	$L = \sqrt{IK}$
$M = 4,991627 \ldots$	$lM = 0,6982421 \ldots$	$M = \sqrt{KL}$
$N = 4,997242 \ldots$	$lN = 0,6987304 \ldots$	$N = \sqrt{KM}$
$O = 5,000052 \ldots$	$lO = 0,6989745 \ldots$	$O = \sqrt{KN}$
$P = 4,998647 \ldots$	$lP = 0,6988525 \ldots$	$P = \sqrt{NO}$
$Q = 4,999350 \ldots$	$lQ = 0,6989135 \ldots$	$Q = \sqrt{OP}$
$R = 4,999701 \ldots$	$lR = 0,6989440 \ldots$	$R = \sqrt{OQ}$
$S = 4,999876 \ldots$	$lS = 0,6989592 \ldots$	$S = \sqrt{OR}$
$T = 4,999963 \ldots$	$lT = 0,6989668 \ldots$	$T = \sqrt{OS}$
$V = 5,000008 \ldots$	$lV = 0,6989707 \ldots$	$V = \sqrt{OT}$
$W = 4,999984 \ldots$	$lW = 0,6989687 \ldots$	$W = \sqrt{TV}$
$X = 4,999997 \ldots$	$lX = 0,6989697 \ldots$	$X = \sqrt{WV}$
$Y = 5,000003 \ldots$	$lY = 0,6989702 \ldots$	$Y = \sqrt{VX}$
$Z = 5,000000 \ldots$	$lZ = 0,6989700 \ldots$	$Z = \sqrt{XY}$

Si ha dunque $l5 = 0,69897$, cioè $10^{0,69897} = 5$.

Allo stesso modo si possono trovare i logaritmi degli altri numeri per qualunque base logaritmica a. Le tavole di Briggio, e di Ulacquio sono calcolate sulla base 10, e sono oramai le più note, e comuni.

101. Sarebbe intollerabile la noja del calcolo, se si dovessero cercare immediatamente col metodo spiegato i logaritmi di tutti i numeri naturali. Quattro sono gli artificj più comuni per abbreviarne il lavoro;

1.° Di cercare col precedente metodo solamente i logaritmi de' numeri primi, e co le multiplicazioni di questi logaritmi, per 2, per 3...., per n si avranno i logaritmi delle loro potenze seconde, terze..., n^{esime}.

2.° Di cercare, coll' addizione de' logaritmi de' numeri primi, i logaritmi de' loro composti.

3.° Di cercare, coll' addizione, o sottrazione de' logaritmi di certi altri numeri non primi, i logaritmi de' loro multipli, o summultipli.

4.° Di cercare, co' logaritmi di varj numeri, posti ad eguale intervallo nella serie naturale, i logaritmi de' numeri intermedj.

I primi tre compendj sono per se chiari dalle formole dell' articolo precedente: Aggiungendo al logaritmo di 10 quello di $\frac{9}{10}$, si ha il doppio logaritmo di 3: Sottraendo il logaritmo di 2 dal logaritmo di 10, si ha il logaritmo di 5... ec. Il quarto compendio dipende dal metodo delle interpolazioni, che noi spiegheremo nel secondo libro.

102. Questi, ed altri compendj per formare le tavole de' logaritmi, si applicano facilmente ad altri metodi più universali, presi da principj più elevati del calcolo. Eulero nell' introduzione citata al num. 94., Reyneau nel secondo tomo dell' Analisi dimostrata, ed altri, mostrano in generale, che il logaritmo del numero $1 + x$, che rappresenta qualunque numero maggiore, o minore dell' unità, è eguale ad $\frac{1}{k}\left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \ldots \text{ec.}\right)$, ed il valore

di

di k dipende dalla base a fatta eguale ad $1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1 \cdot 2} + \frac{k^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots$ ec.

103. Tra tutti i sistemi de' logaritmi, due sono i più conosciuti; quello della base $a = 10$, che dà i logaritmi chiamati *volgari*, e quello della base

$$a = 2,\ 718281828459045235360028 \ldots \text{ ec.},$$

che dà i logaritmi chiamati *iperbolici* dall' esprimersi, che si fa con essi nella geometrìa sublime, la quadratura dell' iperbola. Nel sistema volgare, il logaritmo di 10 è l'unità, come al num. 100., e nel sistema iperbolico il logaritmo di 10, è

$$2,\ 302585092994045684017991 4 \ldots \text{ ec.}$$

Di questi logaritmi di 10 si farà uso nell' articolo seguente.

104. Intanto si noti, che i logaritmi della base 10 oltre le utilità generali di tutti i logaritmi di basi diverse, hanno le proprie, e particolari, per cui vengono a preferenza d'ogni altro sistema usati ne' calcoli. Qualunque sistema di logaritmi dà i logaritmi de' numeri naturali (e conseguentemente d'ogni altro numero), composti d'un numero intero chiamato *caratteristica*, e d'una frazione decimale, chiamata da Eulero, e da altri *mantissa*. Ora, i logaritmi de' numeri naturali, tra 1, e 10, stanno nel sistema di $a = 10$, tra lo zero, e l'unità; i logarirmi de' numeri tra 10, e 100, stanno tra 1, e 2, e così nel resto. Onde; 1.° Dato il logaritmo volgare d'un numero, si conosce dalla semplice caratteristica di quante figure (intere) debba essere composto il numero, che gli corrisponde, e dal numero dato si conosce la caratteristica del suo logaritmo; dacchè *la caratteristica del logaritmo volgare è composta di tante unità una meno, quante sono le figure* (intere) *nel dato numero*.
2.° Aumentando di n unità la caratteristica d'un logaritmo, si ha il logaritmo del n^{cuplo} del numero medesimo. Queste due

pro-

proprietà, che portano una facilità sorprendente ai calcoli, non sono comuni ai logaritmi di base diversa dai volgari.

Riduzione d'un dato Sistema di Logaritmi a qualunque altro Sistema cercato.

105. Noi non abbiamo per le mani, che i logaritmi costruiti sulla base 10; eppure assai volte, o è utile, o è necessario d'avere i logaritmi costruiti su qualche base diversa. Una generale proprietà de' logaritmi di qualunque sistema ci mette a stato di supplire ad ogni bisogno colle sole tavole comuni: Essa è, che i logaritmi di due numeri di un sistema sono in proporzione geometrica coi logaritmi de' due medesimi numeri dedotti da un altro sistema.
Siano m, n i logaritmi di due numeri A, A' formati colla base a; si avrà $A = a^m$, $A' = a^n$, ed alzando la prima equazione alla potenza n, e la seconda alla potenza m, sarà $A^n = a^{mn}$, $A'^m = a^{mn}$, cioè $A^n = A'^m$, ossia $A = A'^{\frac{m}{n}}$; Allo stesso modo, dati i logaritmi m', n' de' due medesimi numeri in un altro sistema di base a', sarà $A = A'^{\frac{m'}{n'}}$; dunque $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$.

106. Quindi; 1.° $n' = \frac{m'}{m} \cdot n$. Cioè, se m è il logaritmo d'un numero A' nel sistema comune, ed m' il logaritmo del medesimo numero in qualunque altro sistema, si avrà il logaritmo n' d'un altro qualunque numero A in questo sistema medesimo. A cagione d'esempio, il logaritmo comune m di $A' = 10$ è l'unità, ed il logaritmo iperbolico di 10 è $2,\ 3025 \ldots$ ec. $= m'$; sarà $\frac{m'}{m} = \frac{2,\ 3025 \ldots \text{ ec.}}{1}$; donde, chiamando L il logaritmo iperbolico di A, sarà $LA = lA \times 2,\ 3025 \ldots$ ec.

Q 107.

107. 2.° $n = \frac{m}{m'} . n'$. Cioè, se invece de' logaritmi comuni avessimo le tavole de' logaritmi d'un altro sistema, sarebbe ancora facile il trovare i logaritmi comuni de' numeri. A cagione d'esempio, il logaritmo comune m di 10 è l'unità, ed il logaritmo iperbolico m' di 10 è 2, 3025... ec.;

sarà $\frac{m}{m'} = 0,\ 4342944819032518 27...$ ec.;

donde $lA = LA \times 0,\ 434294....$ ec.

Uso delle tavole de' Logaritmi comuni.

108. Trovare per mezzo delle tavole il logaritmo, che corrisponde ad un dato numero A.

In questo problema non si trova difficoltà alcuna, fuorchè nel caso, in cui A sia un numero misto d'una parte intera, e d'una frazione, o volgare, o decimale, oppure sia A un numero intero maggiore del massimo delle tavole, o finalmente sia una semplice frazione decimale.

Egli è evidente, che i logaritmi de' numeri interi minori del massimo delle tavole si leggono in tutte le tavole immediatamente scritti accanto al dato numero, e che il logaritmo d'una frazione $\frac{v}{y}$ è $lv - ly$. Spiegheremo qui le formole per que' tre primi casi, e soggiungeremo in seguito i compendj, e le avvertenze necessarie per usarle con facilità.

109. Se il dato numero A è misto d'una parte intera B, e d'una frazione C; si cerchi immediatamente dalle tavole lB, e $l(B+1)$, e sia $l(B+1) - lB = D$; facendo $1 : C :: D : s$, sarà $lA = lB + s$.

110. Se il dato numero A è un numero intero maggiore del massimo delle tavole; si divida A per un numero t tale, che

nel quoziente $B + C$ resti la parte intera B composta di tante figure, una meno, quante sono nel massimo numero delle tavole; sarà $\frac{A}{t} = B + C$, si cerchi (num. 109.) il logaritmo di $B + C$; sarà $l(B+C) = l\frac{A}{t} = lA - lt$; donde $lA = (lB + C) + lt$.

111. Se il dato numero A è una semplice frazione decimale, si multiplichi A per un numero t tale, che il prodotto B sia un numero intero; sarà $B = At$, ed $lB = lAt = lA + lt$; donde $lA = lB - lt$.

112. Ecco alcuni compendj. Nel primo problema; 1.° Se sia C una frazione volgare rappresentata da $\frac{E}{F}$, si avrà $A = \frac{BF + E}{F}$, e $lA = l(BF + E) - lF$; giova questo compendio, massimamente quando $BF + E$ non è un numero maggiore del massimo delle tavole.

2.° Se la frazione C sia una semplice frazione decimale di r figure, avendone n l'intero B, ed $n + r$ non sia numero maggiore del numero m di zeri, che ha il massimo delle tavole, basterà considerare $B + C$ come un numero intero, e sarà $(10)^r A = B + C$, e trovato il logaritmo di $B + C$ immediatamente dalle tavole, sarà $l(B + C) = l(10)^r A = lA + l(10)^r$; donde $lA = l(B + C) - r,\ 000...$ ec.

3.° Se $n + r > m$, si piglino le prime figure m, come se esprimessero un intero B, ed il residuo fosse un rotto decimale C; trovato col metodo del num. 109. il $l(B + C)$, sarà $lA = (lB + C) - (m - n),\ 000...$ ec.

4.° Si noti, che il precedente compendio avrà uso ancor quando sia A un semplice decimale, ed $r > m$, basta fare nella formola precedente $n = 0$, e sarà $lA = l(B + C) - m,\ 0000...$ ec.

113. Siccome la multiplicazione, o divisione d'un numero per

per un termine della serie decadica $10 . 100 . 1000 \ldots$ ec. si fa facilmente, o coll' aggiungere al dato numero verso la destra de' zeri, o colla virgola separatrice de' decimali, sarà meglio, nel problema secondo, e terzo, prendere per t un termine della serie medesima. Così al num. 110. sia 1 con m zeri il massimo numero delle tavole, ed il numero dato A abbia figure $m+r$; si chiami B l'intero espresso dalle sole figure prime m (cioè prese da sinistra a destra), ed il resto considerato come decimale si chiami C; sarà $\frac{A}{(10)^r}=B+C$, e trovato (num. 109.) il logaritmo di $B+C$, sarà $l(B+C)=l\frac{A}{(10)^r}=lA-l(10)^r$, donde $lA = l(B+C)+r$, ooo... ec. Ed al num. 111., sia r il numero delle figure, che vengono dopo la virgola nel decimale A, e sia l'intero $B=(10)^r A$; sarà $lB=lA+l(10)^r$; onde $lA=lB-r$, oooo... ec.

114. Avvertenze. 1.º Il logaritmo trovato al num. 109. non è del tutto esatto, ma solo prossimamente: Il metodo suppone le differenze de' numeri proporzionali alle differenze de' loro logaritmi, ciocchè non è vero parlando per se; per avere i medj geometrici, non basta il prendere gli aritmetici.
2.º Le differenze de' logaritmi tanto sono più prossimamente proporzionali alle differenze de' numeri, quanto i numeri sono più grandi, e si discostano enormemente dalla proporzionalità ne' numeri molto piccoli, come di una, ed anche di due figure. Ciò si può dimostrare *a priori*, ma si vedrà facilmente dalle tavole: Se si prendano nelle tavole comuni i $l(A+2)-l(A+1)$, e $l(A+1)-lA$, non si troveranno mai eguali queste differenze, ma esse si scosteranno poco dall' uguaglianza, se A si piglj verso il fine delle tavole, e saranno molto disuguali tra se, se si piglino verso al principio.

3.º Quindi nel caso del num. 109. se B fosse un numero troppo piccolo, converrebbe ridurre la frazione volgare C in decimali, e servirsi d'uno de' compendj posti al num. 113., ma basterà pigliare un numero $2m-n$ di figure decimali.

4.º In generale però si può vedere con facilità fino a quali figure di decimali debba essere esatto il logaritmo, che si trova col metodo del num. 109. si esamini fino a quali figure di decimali sia $l(B+1)-lB$ eguale a $l(B+2)-l(B+1)$, e fino alle stesse sarà sicuramente esatto l's del num. 109.; lo sarà fors' anche fino all' immediata seguente, essendo più proporzionali le differenze tra $l(B+1)$, e lB, che tra $l(B+2)$, e lo stesso lB; le inferiori figure per l'ordinario verranno erronee.

115. Trovare per mezzo delle tavole il numero, che corrisponde ad un dato logaritmo comune. Anche in questo secondo problema tre soli sono i casi, che seco portano qualche difficoltà: Quando il dato logaritmo è minore del massimo logaritmo delle tavole: Quando il dato logaritmo è maggiore del logaritmo massimo delle tavole: Quando il dato logaritmo è negativo. E' evidente, che se il dato logaritmo si trova esatto nelle tavole, vi starà scritto accanto il numero, che vi corrisponde.

116. Se il dato logaritmo lA è minore del massimo delle tavole. Sia lB il logaritmo prossimamente minore di lA, sarà $l(B+1)$ il logaritmo prossimamente maggiore, si faccia

$$l(B+1)-lB:1::lA-lB:\frac{lA-lB}{l(B+1)-lB}=s;$$

sarà $A=B+s$.

117. Se lA è maggiore del massimo logaritmo delle tavole. Sia $m+1$ la caratteristica del massimo logaritmo delle tavole, ed $m+n$ la caratteristica di lA; si faccia

$$lA-n, \text{oooo} \ldots \text{ec.} = l\frac{A}{(10)^n}=lB;$$

sarà $A=(10)^n B$.

118. Se

118. Se lA è negativo. Sia $n \div m$ la caratteriſtica di lA; ſi faccia $lA + (m \div n)$, 000... ec. $= l(10)^{m+n} A = lB$; ſarà $A = \frac{1}{(10)^{m+n}} B$.

119. Queſte formole ſi deducono da' medeſimi principj, da' quali ſi ſono dedotte quelle del problema precedente, ed hanno de' compendj analoghi, e delle ſimili avvertenze.
Nel primo problema; 1.° Se la caratteriſtica è troppo piccola, conviene, per evitare gli errori, accreſcerla quanto ſi può: Sia $m + 1$ la caratteriſtica maſſima delle tavole, ed $m - n$ la caratteriſtica del dato logaritmo: Si trovi il numero corriſpondente alla caratteriſtica m unita alla data mantiſſa, riducendo la frazione in decimali, e ſi traſporti la virgola diviſoria da deſtra a ſiniſtra per figure n, coſicchè ſiano $m - n$ figure negli interi.
2.° La frazione s ſi dovrà ſempre ridurre in decimali, e di queſti baſterà trovarne tante figure, che tra interi, ed eſſi vi ſia un numero $2m$ di figure; il reſto non ſarebbe eſatto.
3.° Speſſo non ſarà biſogno di tener conto della frazione, principalmente quando la caratteriſtica foſſe zero, oppure 1, ed inſieme baſtaſſe di avere il numero cercato in tre, o due decimali; ſi cerchi al fine delle tavole comuni il numero corriſpondente alla data mantiſſa, e ſi prendano una, o due delle quattro figure, che formano il numero corriſpondente, per interi, e le altre per decimali.

120. Nel ſecondo problema; 1.° Se foſſe $n > m$, baſterà ſvolgere la frazione, che ſta in B in decimali, finchè vi ſieno figure in tutto $2m$; a queſto B ſi aggiungano verſo la deſtra tanti zeri fino a compire un numero di figure $m + n \div 1$.
2.° Si potrebbe dividere il dato logaritmo in due, o più, tali, che tutti ſi trovino nelle tavole, e prendere il prodotto de' loro numeri; ma queſto metodo ſarà il più delle volte, o difficile aſſai, o fatto all' azzardo.

121. Nel

121. Nel problema terzo: 1.° Si può conſiderare lo lA come poſitivo, e trovato il numero A, che vi corriſponde, ſarà $\frac{1}{A}$ il numero cercato.
2.° Se cercando la frazione $\frac{E}{F}$, che corriſponde ad un logaritmo negativo lA, ſi voglia, che il denominatore F, o il numeratore E ſia un numero dato, ſarà nel primo caſo $lE = lF + lA$, e nel ſecondo ſarà $lF = lE - lA$.
3.° Se nella formola del num. 119. foſſe $m = 0$, come ſpeſſo accade ne' calcoli ordinarj, la formola ſarebbe più ſemplice, cioè $A = \frac{1}{(10)^n} B$; ed allora per n baſterebbe prendere il logaritmo 4 del maſſimo numero 10000 delle tavole comuni.

Metodo per evitare i' Logaritmi negativi.

122. IN qualunque ſiſtema de' logaritmi, il logaritmo delle frazioni proprie è negativo, per eſſere, come s'è dimoſtrato, il logaritmo dell' unità eguale a zero. Sanno i ſoli calcolatori di tavole aſtronomiche, e quegli, che maneggiano per mezzo de' logaritmi i problemi trigonometrici quanto grande imbarazzo s'introduca ne' calcoli un po' prolissi da queſti logaritmi delle frazioni, onde ben a propoſito s'è penſato ad un metodo facile, e ſicuro per evitargli. Tutto il metodo è fondato ſulla ſeguente propoſizione:
Si può ſupporre, che il logaritmo dell' unità ſia $(10)^n$; e tutti i logaritmi *ideali*, che in queſta ſuppoſizione ſi dedurranno dal calcolo per le frazioni, corriſponderanno a frazioni decimali, che avranno verſo la ſiniſtra tanti zero meno uno, quante ſono le unità, che mancano alla caratteriſtica per compire l'aſſunto termine decadico: Un' occhiata alla ſeguente tavola.

Nu-

Numeri Naturali.	Logaritmi Volgari.	Logaritmi Ideali.	
10000	+ 4, 0000000	14, 0000000	104, 0000000
1000	+ 3, 0000000	13, 0000000	103, 0000000
100	+ 2, 0000000	12, 0000000	102, 0000000
10	+ 1, 0000000	11, 0000000	101, 0000000
1	0, 0000000	10, 0000000	100, 0000000
0, 1	— 1, 0000000	9, 0000000	99, 0000000
0, 01	— 2, 0000000	8, 0000000	98, 0000000
0, 001 ...	— 3, 0000000	7, 0000000	97, 0000000
0, 0001 ..	— 4, 0000000	6, 0000000	96, 0000000
.... ec.			

123. Sembra, che si cambj con questa supposizione tutta la teorìa de' logaritmi; dacchè fatto $y = 1$, non è più $a^{(10)^n}$ eguale all' unità; ma, a vero dire, non si porta con ciò alcuno sconcerto nelle tavole logaritmiche. Fatta che sia comune a tutti i logaritmi questa supposizione, si cambieranno tutti nella ragione stessa, o, che è lo stesso, le variazioni saranno relativamente tutte eguali. Se si aggiungano a tutte le caratteristiche de' logaritmi n unità, si multiplicano i numeri corrispondenti per $(10)^n$, ma, e questi, e quegli mantengono sempre la stessa ragione tra se, che avevan prima. In una parola, l'artificio presente si riduce al compendio terzo del num. 119., ed equivale all' uso delle tavole, che incominciano non dal zero, ma da $(10)^n$.

124. Ciò supposto: Sia $(10)^n$ il logaritmo dell' unità, e sia L la lettera, che indica il logaritmo ideale d'un numero qualunque A; si disegni, come prima, per l il logaritmo comune del medesimo A, e per q la mantissa di A.

Si avrà $LA = (10)^n + lA$

quindi $LA^m = (10)^n + lA^m = (10)^n + mlA$

e $LA^{\frac{1}{m}} = (10)^n + lA^{\frac{1}{m}} = (10)^n + \frac{1}{m} lA$.

125. E' evidente: 1.° Che per avere il logaritmo ideale di qualunque numero A, e di qualunque sua potenza, o radice, di cui sia dato il logaritmo comune, basta aggiungere $(10)^n$ al dato logaritmo comune del medesimo, o, che è lo stesso, basta sostituire nelle precedenti tre formole *ecumeniche* il valore di lA, mlA, $\frac{1}{m} lA$.

2.° Che per avere il logaritmo comune di un numero A, e di qualunque sua potenza, o radice, di cui sia dato il logaritmo ideale, basta sottrarre $(10)^n$ dal dato logaritmo ideale, ossia trasporre nelle precedenti tre formole ecumeniche il termine $(10)^n$, e sostituirvi il valore di LA, LA^m, $LA^{\frac{1}{m}}$.

126. Nei calcoli ordinarj della trigonometrìa, e dall' astronomìa, è sufficiente il supporre $n = 1$. Si dinoti adunque con l' il *complemento aritmetico* d'un dato logaritmo comune, cioè la differenza del dato logaritmo da 10, e facendo nelle predette formole le sostituzioni di lA, preso dagli articoli precedenti, si avrà

Per la prima Formola Ecumenica

$$LA = (10)^n + lA$$

I. Se A è un numero intero di r figure,

sarà $LA = 9 + r + qA$

II. Se A è una frazione decimale; chiamando D le figure significative del medesimo, prese per intere, ed r il numero totale delle figure tra zeri, ed interi, che vengono dopo la virgola;

sarà $LA = (10 - r) + lD$

III. Se A è una frazione $\frac{B}{C}$, comunque B, o C, o amendue siano numeri interi, o decimali;

sarà $LA = lB + l'C$

IV. Se A è una frazione $\frac{1}{C}$, comunque C sia intero, o decimale;

sarà $L\,A = l'C$

Per la seconda Formola Ecumenica

$L\,A^m = (10)^n + m\,l\,A$

V. Se A è un numero intero di r figure;

sarà $L\,A^m = 10 + m\,(r-1) + m\,q\,A$

VI. Se A è una frazione decimale di r figure dopo la virgola, contando anche le significative D;

sarà $L\,A^m = 10 - m\,r + m\,l\,D$

VII. Se A è una frazione $\frac{B}{C}$, comunque B, o C, o amendue siano numeri interi, o decimali;

sarà $L\,A^m = 10\,(1-m) + m\,(l\,B + l'C)$

VIII. Se A è una frazione $\frac{1}{C}$, comunque C sia intero, o decimale;

sarà $L\,A^m = 10\,(1-m) + m\,l'\,C$

Per la terza Formola Ecumenica

$L\,A^{\frac{1}{m}} = (10)^n + \frac{1}{m}\,l\,A$

Basta sostituire nelle quattro formole dedotte dalla seconda Ecumenica il numero $\frac{1}{m}$ invece di m.

127. Colla trasposizione del num. 125. si può avere il numero, che corrisponde ad un logaritmo ideale; ma v'ha per ciò un' altra strada più corta, e più semplice. Si trovino sul fine delle tavole le figure corrispondenti alla mantissa del dato logaritmo ideale, e chiamando t la caratteristica del medesimo logaritmo; 1.° Se $t = 9$, tutte le figure trovate si mettano immediatamente dopo la virgola decimale.

2.° Se $t > 9$, si metta la virgola decimale dopo $t - 9$ figure prese da sinistra verso la destra.

3.° Se $t < 9$, si metta dopo la virgola, ed alla sinistra delle figure trovate, un numero $9 - t$ di zeri. Tutto è evidente dall' essere nel primo caso $9 - 10 = -1$, che per il num. 103. ci fa riporre subito dopo la virgola le figure corrispondenti alla mantissa del logaritmo, che ha -1 per caratteristica.

128. Il frequente uso delle precedenti formole suggerirà ne' casi particolari certi compendj, che infinita, e nojosa cosa sarebbe il riferirgli qui minutamente. Ne accenno due soli.

1.° Se nel cercare il logaritmo ideale di $\frac{B}{C}$, quando B, e C sono frazioni decimali, si usi la formola III., si dovranno fare tre sottrazioni; si avrà con compendio di calcolo il logaritmo cercato, se si sottragga il $L\,C$ da $L\,B$, aggiungendo se fa bisogno tante diecine alla caratteristica di $L\,B$, quante se ne richieggono per potervi, dopo la sottrazione delle altre figure, sottrarre ancora la caratteristica di $L\,C$ dalla caratteristica di $L\,B$.

2.° Trovandosi facilmente col metodo precedente il $L\frac{B}{C}$, quando siano B, C numeri decimali, la formola VII., per avere il logaritmo ideale della potenza m di $\frac{B}{C}$ si riduce a sottrarre da $m\,L\frac{B}{C}$, o dalla sua caratteristica, il numero $10\,(m-1)$, e conseguentemente per avere il logaritmo ideale della radice m di $\frac{B}{C}$, basta aggiungere a $L\frac{B}{C}$, o alla sua caratteristica, il numero $10\,(m-1)$, e dividere per m tutta la somma.

129. Par-

129. Parmi, che coi cinque articoli, ne' quali è ſuddiviſo il preſente capo reſti dedotta, non ſenza qualche particolare eleganza, da' ſuoi più ſodi, e più univerſali principj tutta la teorìa de' logaritmi: Principalmente in queſt' ultimo articolo mi ſono ſtudiato di trattare ampiamente la teorìa de' logaritmi negativi. Eſſa è ſtata introdotta da pochi anni in quà, ma neſſuno, ch' io ſappia, s'è finora preſa la pena di ridurla a metodo, ed a formole facili (*) all' uſo. Unicamente ho letto ſu queſta materia il Sig. De La Lande, che al libro venteſimo quarto della ſua Aſtronomìa, ſtende la pura pratica di queſto calcolo *per le frazioni decimali;* e l'Abbate La Caille, che al num. 344... ec. de' ſuoi Elementi d'algebra inſegna l'uſo delle tavole logaritmiche formate ſull' ipoteſi di $l\,1 = 10$ *per le frazioni volgari, e decimali.*

LI-

(*) *La Teorìa de' logaritmi negativi è una parte delle Matematiche Elementari la più intereſſante per tutti i Calcolatori; converrebbe però* (dicono alcuni) *che ſi rendeſſe più piana, ed addattata alla pratica, ſpogliandola, per quanto ſi può, da quel ſerioſo, e per alcuni aſpro corredo delle formole algebraiche.* Io veramente mi ſono fermato ſoltanto a ſviluppare i principj generali ſui quali eſſa s'appoggia, ed a dedurne le formole aſtratte per tutto il calcolo: Ciò ſolo portava l'uniformità del metodo, che regna in tutta queſta, qualunque ſiaſi, operetta: Lo ſvolgere eſattamente tutte le formole in teoremi, ed il fare certe particolari rifleſſioni eſemplificate con eſempj a ſcioglimento di quelle difficoltà, che s'incontrano nella loro applicazione, l'ho laſciato qui, e dappertutto altrove, all' induſtria, ed al privato ſtudio del leggitore. Come però ſono convinto della neceſſità di far bene a tutti comprendere il calcolo de' logaritmi negativi, mi ſono determinato ad inſerire al fine del ſecondo mio libro una Memoria, ultimamente compoſta, ed ancora inedita, ſu queſta materia, del P. Roggiero Boſcovich. Queſta ſupplirà abbondevolmente a tutto; abbraccia eſſa, e la teorìa, e la pratica, di modo, che può ommettere l'una chi ſolamente dilettiſi dell' altra, e chi ſi compiaccia d'amendue le potrà vedere in un ſol punto di viſta unite, ed illuſtrate. Trall' altre ſue belle rifleſſioni, prende il P. B. ad eſaminare un caſo da me indicato ſolamente, perche con qualche calcolo riducibile agli altri, cioè quando $\mathcal{A}$ ſia una tale frazione $\frac{BCD\ldots\ ec.}{MNP\ldots ec.}$, che abbia uno, o più fattori decimali in uno, o in amendue de' ſuoi termini.

LIBRO SECONDO.

Formazione, e Sommazione delle Serie.

CAPO PRIMO.

Serie, che naſcono dalle potenze, e dalle radici algebraiche.

Proprietà delle potenze d'un binomio.

1. SI chiama *Serie*, come è noto, dagli Analiſti qualunque moltitudine, ammaſſo, unione di quantità, che le une alle altre ſuccedanſi con un cert' ordine, e con una coſtante legge comune a tutti; e la parte più intereſſante nella teorìa delle ſerie è di trovare i termini generali delle ſerie propoſte, e date le ſerie, o i loro termini generali, trovare la ſomma generale delle medeſime. Per andare con ordine in queſta trattazione, eſporrò nel preſente capo, e nel ſeguente, diverſe ſerie, che naturalmente ſi ſvolgono, e naſcono dal calcolo delle quantità algebraiche, e nel capo terzo, dopo d'avere diſtinte in claſſi, ed eſpreſſe generalmente diverſe ſerie, ſpiegherò il metodo per trovare la loro ſomma, ed il loro termine generale.

2. Le ſerie, che naſcono dalle potenze algebraiche d'un binomio vogliono eſſere le prime a conſiderarſi: tutte racchiudonſi ſotto la forma $(a+b)^{m-1}$: Contempliamo per ciò nella tavola ſeconda le potenze prima, ſeconda, terza..... di $a+b$. 1.° La più alta potenza di a, ha per eſponente l'eſponente della potenza di $a+b$, e ſta ſolamente nel primo termine di ciaſcuna potenza, andando ſempre ſminuendo d'un' unità negli

altri

altri, fino all' ultimo termine, nel quale non si trova potenza alcuna di a, ovvero si trova a^0.

2.° La seconda parte b del binomio $a+b$ non si vede nel primo termine, o più veramente, vi si trova coll' esponente zero, è di una dimensione nel secondo termine, e da questo agli altri termini crescono sempre d'un' unità gli esponenti delle sue potenze, fino all' ultimo, in cui egli ha la sua potenza massima d'esponente eguale all' esponente della potenza.

3.° Quindi in ciascuna potenza di $a+b$ gli esponenti della prima parte a formano una progressione aritmetica decrescente colla differenza costante eguale all' unità, e gli esponenti di b formano la stessa progressione, ma rovesciata, cioè disposta con ordine contrario. Tutto s'intenda andando da sinistra verso la destra.

4.° In ciascun termine le dimensioni, o gli esponenti delle potenze di a, e di b prese insieme sono tante, quante sono le unità nell' esponente della potenza, e quindi tutti i termini delle particolari potenze di $a+b$ sono omogenei.

5.° Ciascuna potenza del binomio è formata da tanti termini più uno, quante sono le unità nell' esponente del grado; la seconda potenza ha tre termini, la terza quattro..... ec.

6.° In qualunque potenza di $a+b$ il numero de' termini, ne' quali si trova b, è eguale al numero de' termini, ne' quali si trova l' a, e questo numero è eguale all' esponente della potenza.

7.° L'ultimo termine di qualunque potenza, cioè b^m è eguale al coefficiente mb, che ha l'altra parte a del binomio nel secondo termine della potenza medesima, ma diviso per m, ed alzato alla potenza m; $b^2 = \left(\frac{2b}{2}\right)^2$

$$b^3 = \left(\frac{3b}{3}\right)^3$$

... ec.

8.° Da

8.° Da ciascuna formola delle potenze di $a+b$, si deducono le parti componenti di ciascuna potenza d'un binomio. Il quadrato, o la seconda potenza d'un binomio qualunque è composto dai quadrati delle parti, e da due prodotti della prima parte nella seconda; il cubo, o la terza potenza d'un binomio qualunque è composto da' cubi delle parti, da' tre prodotti del quadrato della prima parte nella seconda, e da' tre prodotti del quadrato della seconda nella prima. La quarta potenza... ec.

3. Meritano una particolare riflessione i coefficienti numerici de' termini di ciascuna potenza. 1.° In ciascuna potenza di $a+b$ i coefficienti numerici de' termini egualmente lontani dagli estremi sono eguali. Nella quinta potenza di $a+b$ il coefficiente 5 del secondo termine è eguale al coefficiente 6 del penultimo; il... ec.

2.° I coefficienti numerici di ciascuna potenza, crescono di termine in termine, quindi con ordine contrario decrescono fino all' ultimo.

3.° Quindi per le potenze d'esponente impari, basta trovare i coefficienti della metà del numero de' termini, per avere i coefficienti degli altri termini: per le potenze d'esponenti pari... ec.

4.° I coefficienti de' primi termini delle potenze di $a+b$ formano una serie paralella d'unità: i cofficienti de' secondi termini formano la serie de' numeri naturali: i coefficienti degli altri termini formano diverse serie di numeri, che tutte nascono dalla somma continua de' termini della serie precedente.

5.° Se l'esponente della prima parte a d'un termine qualunque n^{esimo}, si multiplichi per il coefficiente numerico del medesimo termine n^{esimo}, ed il prodotto si divida per il numero de' termini precedenti inclusivamente il termine n^{esimo}, il quoto sarà eguale al cofficiente del termine, che segue, cioè del termine $(n+1)^{esimo}$.

4. Soggiungo due altri metodi per trovare i cofficienti di ciascun termine per le formole delle potenze di $a+b$.

Pri-

Primo metodo 1 . 1 . . . . coefficienti della prima potenza

$\underline{\quad 1 \,.\, 1}$

1 . 2 . 1 . . . . . coefficienti della ſeconda potenza

$\underline{\quad 1 \,.\, 2 \,.\, 1}$

1 . 3 . 3 . 1 . . coefficienti della terza potenza

$\underline{\quad 1 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 1}$

1 . 4 . 6 . 4 . 1 coefficienti della quarta potenza

. . . . . . ec.

Secondo metodo più ſemplice. Si alzi alla potenza m il binomio $1+1$; i termini di queſta potenza ſaranno i coefficienti della potenza m del binomio $a+b$.

$(1+1)^2 = 1+2+1$ . . . . coefficienti di $(a+b)^2$

$(1+1)^3 = 1+3+3+1$ . . . . . coefficienti di $(a+b)^3$

. . . . . ec.

5. Queſte conſiderazioni ſulle potenze del binomio $a+b$ hanno grandiſſimo uſo nell' Analiſi delle equazioni: ne accenno due ſoli. 1.° Ci ſono molte equazioni, nelle quali uno de' membri può divenire una potenza perfetta d'una quantità conoſciuta, coll' aggiungere all' equazione medeſima, o col ſottrarne un' altra conoſciuta quantità: Se ſi ſottragga b^3 dai membri dell' equazione $x^3 - 3bx^2 + 3b^2 x = c^3$, ſi ha $x^3 - 3bx^2 + 3b^2 x - b^3 = c^3 - b^3$, in cui il primo membro è un cubo perfetto di $x-b$; aggiungendo a^2 ai membri dell' equazione $x^2 - 2ax = bc$, ſi ha $x^2 - 2ax + a^2 = bc + a^2$ . . . ec.

2.° Rendendo con queſt' artificio potenza perfetta di qualche quantità uno de' membri dell' equazione, ſi viene ad avere il valore dell' incognita con una ſemplice eſtrazione di radici. Per le equazioni di ſecondo grado della forma $x^2 - px - q = 0$, ſarà $x^2 - px = q$, ed aggiungendo il quadrato della metà del coefficiente del ſecondo termine px, cioè aggiungendo $\frac{1}{4}p^2$,

ſi ha

ſi ha $x^2 - px + \frac{1}{4}p^2 = q + \frac{1}{4}p^2$; donde eſtraendo la radice ſeconda, ſi ha $x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}$, come al num. 94 dell' introduzione.

Per le equazioni di grado quarto della forma $x^4 - px^2 - qx - r = 0$, ſarà $x^4 - px^2 = qx + r$, ed aggiungendo $zx^2 + \frac{(p+z)^2}{4}$ ſi avrà $A \ldots\ldots x^4 - (p-z)\,x^2 + \frac{(p+z)^2}{4} = zx^2 + qx + r + \frac{(p+z)^2}{4} = z\left(x^2 + \frac{qx}{z} + \frac{r}{z} + \frac{(p+z)^2}{4z}\right)$. Conſiderando il primo membro di queſt' equazione, ſi vede ſubito, che eſſo è un quadrato perfetto; il ſecondo membro dell' equazione medeſima ſarebbe pure un quadrato multiplicato per z, ſe foſſe $\frac{q^2}{4z^2} = \frac{r}{z} + \frac{(p+z)^2}{4z}$, cioè ſe foſſe $\frac{q^2}{4z} = r + \frac{(p+z)^2}{4}$, oſſia ſe foſſe $z^3 + 2pz^2 + \genfrac{}{}{0pt}{}{p^2 z}{+4rz} - q^2 = 0$; ſoſtituendo adunque in A il valore di z preſo da queſta equazione, ed eſtraendo le radici, ſi avrà traſponendo, $x^2 \mp x\sqrt{z} \mp \genfrac{}{}{0pt}{}{\frac{q}{2\sqrt{z}}}{+\frac{z-p}{2}} = 0$; che, coll' ambiguità de' ſegni, e l'x^2, eſprime tutte e quattro le radici della data equazione.

6. Ma per tornare al noſtro propoſito; per il num. 2. ſi hanno per ordine tutte le potenze di ciaſcuna parte a, b del binomio $a+b$; per il num. 3. ſi trovano i coefficienti di ciaſcun termine delle potenze medeſime; per avere adunque qua-

 lun-

lunque potenza del binomio $a+b$, non ſarà biſogno, che di unire acconciamente inſieme queſti coefficienti, e queſte potenze delle parti a, b. Così i coefficienti della quarta potenza d'un binomio ſono $1 . 4 . 6 . 4 . 1$; le potenze della prima parte a ſono $a^4 . a^3 . a^2 . a^1 . a^0$; le potenze della ſeconda parte b ſono $b^0 . b^1 . b^2 . b^3 . b^4$; ſi diſpongano queſte tre ſerie, come nella figura ſeguente, e multiplicando ſeparatamente tutto ciò, che ſi trova nella ſteſſa colonna verticale

$$\begin{array}{ccccc} a^4 & a^3 & a^2 & a^1 & a^0 \\ b^0 & b^1 & b^2 & b^3 & b^4 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{array}$$

Sarà $(a+b)^4 = a^4 + 4ba^3 + 6b^2a^2 + 4b^3a + b^4$

7. Se ſi poteſſe generalmente eſprimere per qualunque grado di potenze ciaſcuna di queſte tre ſerie; la multiplicazione de' termini di queſte ſerie, fatta come nell' eſempio precedente, ci darebbe una eſpreſſione generale di tutte le potenze d'un binomio, e ciò baſterebbe per iſvolgere in ſerie le quantità della forma $(a+b)^{m-1}$. Proviamoci a farlo.

Evoluzione in ſerie delle potenze d'un binomio.

8. Sia P la prima parte del dato binomio, e Q la ſeconda; ſarà $P+Q$ la generale eſpreſſione del medeſimo; ſia in oltre $m-1$ l'eſponente della potenza cercata.

1.° L'eſponente del primo termine di qualunque potenza è eguale all' eſponente della potenza cercata; il primo termine adunque di qualunque potenza $m-1$ di $P+Q$, ſarà P^{m-1}; e ſiccome gli eſponenti della prima parte P vanno ſcemando d'un' unità negli altri termini, la ſerie delle potenze di P ſarà generalmente

$$P^{m-1} . P^{m-2} . P^{m-3} . P^{m-4} . P^{m-5} \;.\;.\;.\;.\; \text{ec.}$$

2.° La

2.° La ſeconda parte Q ha l'eſponente zero nel primo termine, l'eſponente 1 nel ſecondo, il 2 nel terzo... ec., cioè la ſerie delle potenze della ſeconda parte Q ſarà generalmente

$$Q^0 . Q^1 . Q^2 . Q^3 . Q^4 . Q^5 . Q^6 \;.\;.\;.\;.\; \text{ec.}$$

3.° Si multiplichi l'eſponente $m-1$ della prima parte P, che ſta nel primo termine, per il coefficiente 1 del primo termine medeſimo, e ſi divida il prodotto per il numero de' termini, che precedono il ſecondo; ſi avrà $\frac{m-1}{1}$ per coefficiente del ſecondo termine; Multiplicando $m-2$ eſponente di P, che ſta nel ſecondo termine per $\frac{m-1}{1}$ coefficiente del ſecondo termine, ſi ha $\frac{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}}{1}$; e dividendo queſto prodotto per 2, numero de' termini, che precedono il terzo, ſi ha $\frac{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}}{1\,.\,2}$ per coefficiente del terzo termine; e colla ſteſſa legge ſi troverà generalmente la ſerie de' coefficienti

$$1;\ \frac{m-1}{1};\ \frac{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}}{1\,.\,2};\ \frac{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}\,.\,\overline{m-3}}{1\,.\,2\,.\,3};\ .\;.\;.\;.\ \text{ec.}$$

4.° Diſponendo queſte tre ſerie come nel num. precedente, ſi avrà

$$\begin{array}{cccc} P^{m-1} & P^{m-2} & P^{m-3} \;.\;.\;.\;.\; \text{ec.} & \\ Q^0 & Q^1 & Q^2 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \text{ec.} & \\ 1 & \frac{m-1}{1} & \frac{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}}{1\,.\,2} & .\;.\;.\;.\; \text{ec.} \end{array}$$

$$(P+Q)^{m-1} = P^{m-1} + \frac{m-1}{1}P^{m-2}Q + \frac{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}}{1\,.\,2}P^{m-3}Q^2 + .. \text{ec.}$$

Queſta formola con poche ſoſtituzioni ſi riduce alla celebre formola Newtoniana del binomio.

Evoluzione delle potenze d'un infinitinomio.

9. Qualunque quantità polinomia si può separare in due parti, una delle quali si chiami P, e l'altra Q: quindi colla precedente formola si può elevare a qualunque potenza $m-1$ qualunque quantità polinomia; l'esperienza però mostra quanto siano nojose le frequenti sostituzioni, che si devono perciò fare nella predetta formola, di quantità alle volte assai complesse. Tentiamo adunque, colla scorta di Eulero, di renderla più commoda del pari, che universale anche per le quantità infinitinomie (*).

Si osservi: 1.° Che $P+Q$ è eguale a $P\left(1+\frac{Q}{P}\right)$; cioè $(P+Q)^{m-1}$ $=P^{m-1}\left(1+\frac{Q}{P}\right)^{m-1}$; alzando adunque alla potenza $m-1$ il secondo fattore $1+\frac{Q}{P}$, e multiplicando ciascuno de' suoi termini per P^{m-1}, si avrà la potenza $m-1$ di $P+Q$.

(*) Il P. Ruggiero Giuseppe Boscovich ha pubblicato nel giornale de' letterati di Roma all' anno 1747. un altro elegantissimo metodo, per alzare un infinitinomio a qualunque potenza, e nel 1748. vi ha aggiunto una memoria divisa in due parti, che contiene varie importanti riflessioni sul metodo medesimo. Uno de' singolari pregi di questo metodo si è, che fa trovare immediatamente da se, e con somma facilità qualunque termine della potenza cercata senza avere ricorso ai termini precedenti; con ciò egli schiva le frequenti diverse sostituzioni, sempre necessarie negli altri metodi, e sempre moleste al calcolatore. Noi ci siamo serviti in questo secondo libro del metodo d'Eulero per essere più uniformi nello scrivere, e più coerenti a tutta la presente dottrina della evoluzione delle serie; ma stimiamo di non dovere privare il pubblico del piacere, e del profitto, che possono trarre gli Studiosi delle Matematiche, dalla lettura d'una memoria ancora inedita del citato P. B., in cui ha egli resa la dimostrazione del suo metodo, e più diretta, ed incomparabilmente più semplice, che nelle altre due. Questa memoria si troverà al fine del libro.

2.° Per alzare $1+\frac{Q}{P}$ alla potenza $m-1$; è evidente, che se sarà $\frac{Q}{P}=ax$, sarà pure $\left(1+\frac{Q}{P}\right)^{m-1}=(1+ax)^{m-1}=1+\frac{m-1}{1}ax+\frac{\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1\;.\;2}a^2x^2+\frac{\overline{m-1}.\overline{m-2}.\overline{m-3}}{1\;.\;2\;.\;3}a^3x^3+\ldots$ ec.

Se $\frac{Q}{P}=ax+bx^2$, sarà $\left(1+\frac{Q}{P}\right)^{m-1}=\left(1+(ax+bx^2)\right)^{m-1}$

$=1+\frac{m-1}{1}(ax+bx^2)+\frac{\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1\;.\;2}(ax+bx^2)^2+\ldots$ ec.

Se $\frac{Q}{P}=ax+bx^2+cx^3$, sarà $\left(1+\frac{Q}{P}\right)^{m-1}$

$=\left(1+(ax+bx^2+cx^3)\right)^{m-1}=1+\frac{m-1}{1}(ax+bx^2+cx^3)$

$+\frac{\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1\;.\;2}(ax+bx^2+cx^3)^2+\ldots$ ec.

Se... ec.

10. Supposte queste cose; 1.° Si rappresenti indeterminatamente la potenza $m-1$ di $1+\frac{Q}{P}$ colla serie $1+Ax+Bx^2$ $+Cx^3$ .... $+Kx^{m-3}+Lx^{m-2}+Mx^{m-1}+Nx^m$; resta a trovarsi il valore di A, B, C, D... ec.

2.° Col metodo esposto nella introduzione, si formino le potenze particolari indicate nel num. precedente, e per ciascuna supposizione del valore $\frac{Q}{P}$ si ordini per x la potenza $\left(1+\frac{Q}{P}\right)^{m-1}$; rappresentandosi colla serie precedente ciascuna serie di $\left(1+\frac{Q}{P}\right)^{m-1}$ si potranno supporre eguali tra se i termini corrispondenti di amen-

amendue; onde si ha $(1+ax)^{m-1} = 1 + \frac{m-1}{1}\,ax$

$$+\frac{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}}{1\,.\,2}\,a^2\,x^2 + \frac{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}\,.\,\overline{m-3}}{1\,.\,2\,.\,3}\,a^3\,x^3 + \ldots \text{ ec.}$$

ed $A = \frac{m-1}{1}\,a \qquad C = \frac{m-3}{3}\,aB \qquad N = \frac{m-n}{n}\,aM.$

$B = \frac{m-2}{2}\,aA \qquad D = \frac{m-4}{4}\,aC$

Di più si ha $(1+ax+bx^2)^{m-1} = 1 + \frac{m-1}{1}\,ax$

$$+\frac{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}}{1\,.\,2}\,a^2\,x^2 + \ldots \text{ ec.}$$

$$+\frac{m-1}{1}\,bx^2$$

ed $A = \frac{m-1}{1}\,a \qquad C = \frac{m-3}{3}\,aB + \frac{2m-3}{3}\,bA$

$B = \frac{m-2}{2}\,aA \qquad N = \frac{m-n}{n}\,aM + \frac{2m-n}{n}\,bL$

Finalmente si ha per l'ultima supposizione

$(1+ax+bx^2+cx^3)^{m-1} = 1 + \frac{m-1}{1}\,ax$

$$+\frac{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}}{1\,.\,2}\,a^2\,x^2 + \frac{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}\,.\,\overline{m-3}}{1\,.\,2\,.\,3}\,a^3\,x^3 + \ldots \text{ ec.}$$

$$+\frac{m-1}{1}\,a^2\,x^2 \qquad + \frac{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}}{1\,.\,2}\,2abx^3 \qquad + \ldots \text{ ec.}$$

$$+\frac{m-1}{1}\,c^3\,x^3 \qquad + \ldots \text{ ec.}$$

ed

ed $A = \frac{m-1}{1}\,a$

$B = \frac{m-2}{2}\,aA + \frac{2m-2}{2}\,b$

$C = \frac{m-3}{3}\,aB + \frac{2m-3}{3}\,bA + \frac{3m-3}{3}\,c$

$N = \frac{m-n}{n}\,aM + \frac{2m-n}{n}\,bL + \frac{3m-n}{n}\,cK$

11. Quindi si ha generalmente per l'infinitinomio

$(1+ax+bx^2+cx^3+\ldots \text{ec.})^{m-1} = 1 + Ax$

$+Bx^2 + Cx^3 + \ldots$ ec.; ed

$A = \frac{m-1}{1}\,a$

$B = \frac{m-2}{2}\,aA + \frac{2m-2}{2}\,b$

$C = \frac{m-3}{3}\,aB + \frac{2m-3}{3}\,bA + \frac{3m-3}{3}\,c$

$D = \frac{m-4}{4}\,aC + \frac{2m-4}{4}\,bB + \frac{3m-4}{4}\,cA + \frac{4m-4}{4}\,d$

$E = \frac{m-5}{5}\,aD + \frac{2m-5}{5}\,bC + \frac{3m-5}{5}\,cB + \frac{4m-5}{5}\,dA + \frac{5m-5}{5}\,e$

.... ec.

12. E' facilissimo l'uso di questa formola per la formazione delle potenze. Si riduca la quantità data ad avere l'unità per primo termine, come s'è fatto al num. 9.; si paragonino i coefficienti della lettera x, che distingue i termini nella quantità

data

data coi coefficienti della formola $1+ax+bx^2 \ldots$ ec., ſi ſoſtituiſca nelle formole di A, B, C .... il valore di m, e di a, b, $c \ldots$ ec.

13. Nella formola medeſima ſi noti: 1.° Che il coefficiente N viene determinato dai coefficienti di tanti termini della quantità data, quante ſono le lettere a, b, c.... delle quali è compoſto $\frac{Q}{P}$; fatto $\frac{Q}{P} = ax$, l'N è determinato dal precedente termine M; fatto $\frac{Q}{P} = ax + bx^2$, l'N è determinato da due precedenti termini L, M.

2.° Che le particolari formole di A, B, C, D, $E \ldots$ ec., ſi poſſono continuare all' infinito; E' chiara la legge, che vi regna: Nella colonna de' primi termini l'm è ſminuito ſucceſſivamente di $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots n$, cioè de' numeri della ſerie naturale; il diviſore di $m-n$ è ſempre n; le lettere piccole nella prima colonna ſono tutte a, nella ſeconda ſono ſempre b, nella terza c;... coll' ordine alfabetico, ed in ciaſcuna colonna il primo termine è ſenza lettere majuſcole, il ſecondo contiene l'A, il terzo B, il quarto C.... parimenti coll' ordine alfabetico.

14. Si noti finalmente, come di paſſaggio, che la ſerie de' coefficienti $\frac{\overline{m-1}}{1}$; $\frac{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}}{1\,.\,2}$; $\frac{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}\,.\,\overline{m-3}}{1\,.\,2\,.\,3} \ldots$ ec. ſcioglie compiutamente il problema, tanto uſato nell' algebra, delle combinazioni. Data qualunque moltitudine $m-1$ di lettere a; b; c; $d \ldots$ ec. trovare quanti diverſi prodotti di due, di tre, di quattro..... lettere ſi poſſono formare. E' evidente, che facendo il prodotto di ciaſcuna lettera in ciaſcuna delle altre, ciaſcuna lettera entra ne' prodotti un egual numero di volte, e che dovendoſi ciaſcuna lettera multiplicare per ciaſcuna delle altre, e non per ſe ſteſſa, ciaſcuna lettera entra ne' prodotti

dotti un numero di volte $m-2$; ma ogni prodotto verrà due volte, giacchè $pq = p \times q = q \times p$; quindi i prodotti delle lettere, ne' ſuoi diverſi binari ſaranno $\frac{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}}{1\,.\,2}$;

Così pure per avere i ternari è neceſſario multiplicare ogni binario per tutte le altre lettere toltene le ſue due, e verrà tre volte lo ſteſſo prodotto, quando per qualunque delle ſue tre lettere ſi multiplicherà il reſiduo ſuo binario, onde il numero de' prodotti a tre a tre, ſarà $\frac{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}\,.\,\overline{m-3}}{1\,.\,2\,.\,3}$; ſimilmente il numero de' prodotti a quattro a quattro, ſarà $\frac{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}\,.\,\overline{m-3}\,.\,\overline{m-4}}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}$, e così nelle altre combinazioni. Onde il coefficiente del termine $n+1$ nella formola del binomio eſprimerà il numero de' prodotti, o delle combinazioni d'un numero qualunque di lettere preſe n ad n.

Evoluzioni delle quantità radicali.

15. Torniamo alle propoſte formole. Non ſervon eſſe ſolamente a ſvolgere in ſerie le quantità finite, o infinitinomie della forma $(a+b)^{m-1}$, oppure $(1+ax + bx^2 + cx^3 \ldots \text{ec.})^{m-1}$; anche le quantità radicali ſi ſottopongono facilmente alle formole medeſime, eſſendoſi dimoſtrato nell' introduzione, che $\sqrt[s]{a^r} = a^{\frac{r}{s}}$; Si faccia $m-1 = \frac{r}{s}$, e ſi divida a in due parti $P+Q$; non vi ſarà maggiore difficoltà nell' eſtrarre le radici, che nel formare le potenze. Reſta a dimoſtrarſi, che le formole abbian luogo, qualunque ſia il numero $m-1$.

S'è già veduto il caſo, in cui $m-1$ ſia un numero intero poſitivo. Se $m-1$ è numero rotto poſitivo rappreſentato da $\frac{r}{s}$, e ridotto a minimi termini; Si alzi, per mezzo della formola, la data quantità $1+x$ alla potenza $\frac{r}{s}$; ſi avrà una quantità diſegnabile per $1+z$: dunque ſe queſta è eguale ad $(1+x)^{\frac{r}{s}}$, elevando ciaſcuna alla potenza s ſi avrà $(1+z)^s = (1+x)^r$: ora, facendo il calcolo, che veramente è longhiſſimo, ſi trovano identiche queſte eſpreſſioni.

Se $m-1$ è numero intero, o rotto negativo; Si rappreſenti per $-\frac{r}{s}$, e ſi avrà $(1+x)^{-\frac{r}{s}} = \frac{1}{(1+x)^{\frac{r}{s}}}$; Si trovi: 1.° Il valore di $(1+x)^{-\frac{r}{s}}$, ſupponendo a ciò buona la formola delle potenze; ſi avrà $1+z$.

2.° Si trovi colla medeſima formola il valore di $(1+x)^{\frac{r}{s}}$; Soſtituendo queſto valore di $(1+x)^{\frac{r}{s}}$ al denominatore di $\frac{1}{(1+x)^{\frac{r}{s}}}$, dovrebbe eſſere $\frac{1}{(1+x)^{\frac{r}{s}}} = 1+z$; $\frac{1}{(1+x)^r} = (1+z)^s$, ed $(1+x)^s\,(1+z)^r = 1$, come pure farà vedere il calcolo.

16. Applichiamo la formola ad un eſempio. Si cerchi la radice ſeconda di $a^2+2ab+b^2$; Si avrà $\sqrt{a^2+2ab+b^2}$ $= (a^2+2ab+b^2)^{\frac{1}{2}}$

1.° $m-1 = \frac{1}{2}$

$m-2 = -\frac{1}{2}$

$m-3 = -\frac{3}{2}$

... ec.

2.° $\frac{m-1}{1} = \frac{1}{2}$

$\frac{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}}{1\,.\,2} = -\frac{1}{8}$

$\frac{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}\,.\,\overline{m-3}}{1\,.\,2\,.\,3} = \frac{1}{16}$

... ec.

3.° $P = a^2$

$P^{m-1} = a$

$P^{m-2} = \frac{1}{a}$

... ec.

4.° $Q = 2ab+b^2$

$Q^2 = 4a^2b^2+4ab^3+b^4$

$Q^3 = 8b^3a^3+12b^4a^2+6b^5a+b^6$

... ec.

Multiplicando i termini corriſpondenti, ſi ha

$a+b+\frac{b^2}{2a}-\frac{b^2}{2a}+\ldots$ ec.

Sembra a prima giunta, che queſta ſerie non eſprima il vero valore della radice cercata, che, come a tutti è noto, dovrebbe eſſere $a+b$; ma, facendovi un po di rifleſſione, ſi vede manifeſtamente l'identità di queſte due eſpreſſioni. Nella propoſta ſerie i termini, che vengon dopo i primi due, ſi elidono vicendevolmente. Il termine $\frac{b^2}{2a}$, viene eliſo dal ſeguente $-\frac{b^2}{2a}$, e così nel reſto; onde la ſerie ſi riduce ad $a+b$.

17. Si noti; 1.° Che ciocchè s'è detto della prima formola delle potenze, vale ancora per l'altra più generale delle quantità infinitinomie.

2.° Che le ſerie dedotte da queſte formole ſono ſerie finite quando $m-1$ è un numero intero poſitivo.

3.° Che negli altri caſi ſi hanno ſempre ſerie prodotte all'infinito, o almeno ſotto una forma di termini infiniti.

Altro metodo per l'Evoluzione de' radicali.

18. SIa A la data quantità radicale di grado $m-1$; C la ſua radice proſſima; E la parte ſconoſciuta, che ſi dovrebbe aggiungere a C per avere la radice eſatta.

Sarà $A=(C+E)^{m-1}=C^{m-1}+\frac{m-1}{1}C^{m-2}E+\frac{\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1\;.\;2}$ $C^{m-3}E^2+\ldots$ ec.; traſcurando tutti i termini, che contengono E alzato ad una potenza maggiore di E^2, ſi avrà

$$A=C^{m-1}+\frac{m-1}{1}C^{m-2}E+\frac{\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1\;.\;2}C^{m-3}E^2.$$

D'onde $\frac{m-1}{1}C^{m-2}E+\frac{\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1\;.\;2}C^{m-3}E^2=A-C^{m-1}=B$.

Si divida queſt'ultima equazione, 1.° per $\overline{m-1}\;C^{m-2}$.

2. Per $\overline{m-1}\,C^{m-2}+\frac{\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1\;.\;2}C^{m-3}E$; ſi avrà dalla prima diviſione $\frac{B}{\overline{m-1}.C^{m-2}}$ maggiore di E della piccoliſſima frazione $\frac{\overline{m-1}.\overline{m-2}.C^{m-3}E^2}{2\,\overline{m-1}.C^{m-2}}=\frac{\overline{m-2}.E^2}{2C}$; e dalla ſeconda ſi avrà $E=\frac{B}{\overline{m-1}.C^{m-2}+\frac{\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1\;.\;2}C^{m-3}E}$; e ſoſtituendo al

deno-

denominatore del ſecondo membro il primo valore di E; ſi avrà

$$E=\frac{B}{\overline{m-1}.C^{m-2}+\frac{\overline{m-1}.\overline{m-2}\,C^{m-3}B}{2.\overline{m-1}.C^{m-2}}}$$

$$=\frac{B}{\overline{m-1}.C^{m-2}+\frac{\overline{m-2}.B}{2C}};$$

e multiplicando per C i termini di queſta frazione, ſi ha

$$E=\frac{BC}{\overline{m-1}.C^{m-1}+\frac{m-2}{2}.B}$$ da aggiungerſi a C.

Tre altre formole per la Evoluzione de' radicali.

19. SI divida la ſeconda equazione del num. precedente per il coefficiente di E^2, ſi compiſca il quadrato (num. 5.), e ſi ſciolga l'equazione, che ne riſulta; ſi avrà

$$E^2+\frac{2}{m-2}CE=\frac{2B}{\overline{m-1}.\overline{m-2}.C^{m-3}},$$

ed $E=-\frac{1}{m-2}C\pm\sqrt{\frac{1}{(m-2)^2}C^2+\frac{2}{\overline{m-1}.\overline{m-2}}.\frac{B}{C^{m-3}}}$;

e facendo $\frac{B}{\overline{m-1}.C^{m-3}}=D$, ſarà

$$E=-\frac{1}{m-2}C\pm\sqrt{\frac{1}{(m-2)^2}C^2+\frac{2D}{m-2}}.$$

20. Si aggiunga C all'ultima equazione del num. precedente, ſi avrà $C+E=\frac{m-3}{m-2}C\pm\sqrt{\frac{1}{(m-2)^2}C^2+\frac{2D}{m-2}}$.

21. Di-

21. Dividendo per $\frac{m-1}{1}C^{m-1}$ la terza equazione del num. 18., si ha $CE + \frac{m-2}{2}E^2 = D$; ossia $(C + \frac{m-2}{2}E)E = D$;

donde $E = \frac{D}{C + \frac{m-2}{2}E}$.

22. Sulle precedenti formole si noti in generale: 1.° Che esse si applicano egualmente a numeri, che alle quantità algebraiche.

2.° Che le formole irrazionali, cioè quelle, che contengono qualche parte radicale non sono buone, che pe' gradi più elevati del secondo.

3.° Che le radici razionali danno una radice approssimata minore della vera, e le irrazionali la danno maggiore; più però s'accostano queste al vero valore, che non quelle.

4.° Che fatta una determinazione di E, se ne può fare una seconda, una terza, e così all' infinito; basta chiamare C la radice già trovata per mezzo delle formole, quindi determinare un nuovo B.... così si correggerà l'errore, per cui nessuna delle formole precedenti dà la radice esatta, cioè l'avere da principio negligentati i termini, in cui E ha più di due dimensioni.

5.° Le formole saranno tante più esatte, quanto più il C s'accosterà alla radice vera; Quindi ne' numeri si prende assai volte per primo C il numero prossimamente maggiore della radice della massima potenza. Ciò si fa quando il numero dato è più vicino ad una potenza maggiore, che ad una minore alla data; l'operazione mostrerà in questi casi le variazioni, che si devono fare ne' segni.

6.° Sostituendo nelle precedenti formole i valori di m per i diversi gradi di radici, si stenderanno facilmente delle tavole utili, o delle particolari formole per tutti i casi. Dalla formola del num. 20. si deducono tutte le formole proposte dall' Allejo per l'estrazione, ed approssimazione delle radici.

Ultimo metodo per la Evoluzione de' radicali.

23. Questo è il più semplice ad enunciarsi, ed a mettersi in pratica. Si estragga col metodo esposto nell' introduzione, la radice della potenza massima, che sta nascosta nella quantità data; Si continui ad operare sull'ultimo residuo collo stesso metodo, unendo al calcolo delle quantità intere anche quello delle frazioni.

Per la quantità $\sqrt{a^2 \pm x^2}$; prendo la radice quadrata di a^2, che è a, e la scrivo accanto ad $a^2 \pm x^2$; sottraggo il quadrato di a, cioè a^2, da $a^2 \pm x^2$; resta $\pm x^2$. Divido $\pm x^2$ per il doppio del primo termine della radice, e trovo per secondo termine $\pm \frac{x^2}{2a}$. Multiplico $\pm \frac{x^2}{a^2}$ per $2a \pm \frac{x^2}{a^2}$, e sottraggo il prodotto $\pm x^2 + \frac{x^4}{4a^2}$ da $\pm x^2$; resta $-\frac{x^4}{4a^2}$. Divido questo residuo per il doppio di $a \pm \frac{x^2}{2a}$, e trovo, per terzo termine della radice, $-\frac{x^4}{8a^3}$. Continuando allo stesso modo l' operazione, avrò un numero indefinito di termini, cioè una serie infinita, che esprimerà il valore di $\sqrt{a^2 \pm x^2}$

$$
\begin{array}{l}
a^2 \pm x^2 \;\big)\; a^2 \pm \dfrac{x^2}{2a} - \dfrac{x^4}{8a^3} \ldots\ldots \text{ec.} \\
-a^2 \\
\hline
\quad \pm x^2 \\
\quad \mp x^2 - \dfrac{x^4}{4a^2} \\
\hline
\quad\quad - \dfrac{x^4}{4a^2} \\
\quad\quad \ldots\ldots \text{ec.}
\end{array}
$$

24. Se la propoſta quantità foſſe $\sqrt{x^2 \pm a^2}$; colle ſteſſe operazioni ſi avrebbe $x \pm \dfrac{a^2}{2x} - \dfrac{a^4}{8x^3} \pm \dfrac{a^6}{16x^5} - \dfrac{a^8}{128x^7} \pm \ldots$ ec.

25. Se a^2 è maggiore di x^2 ſarà più convergente la ſerie del num. 23.; Se x^2 è maggiore di a^2, ſarà più convergente la ſerie del num. 24.; Se a^2 è eguale ad x^2, amendue le ſerie ſaranno paralelle. Col medeſimo metodo ſi ridurranno in ſerie le radicali trinomie, quadrinomie... ec.

Applicazione de' metodi precedenti alle quantità numeriche.

26. Tra tutte le formole ſpiegate ſopra per l'evoluzione delle quantità radicali, ſcelgo ad applicare a' numeri interi quelli del num. 21., perchè mi ſembra più difficile delle altre. Con queſta formola ſi fa l'eſtrazione di qualunque radice da qualunque numero per mezzo della ſemplice diviſione, maneggiata però con qualche particolare artificio. Spiegherò in prima le preparazioni neceſſarie per ridurre qualunque dato numero ad eſſere un dividendo capace di dare co' quoti di ciaſcuna operazione ciaſcuna figura della radice, che ſi cerca; ſpiegherò in ſecondo luogo quali eſſere debbano i membri della diviſione; in terzo luogo quale diviſore, e quale minutore ſi debba prendere in ciaſcuna operazione.

Preparazioni. 1.º Il numero dato A ſi ſepari da deſtra a ſiniſtra in claſſi di tante figure ciaſcuna, quante ſono unità nell' eſponente della radice cercata; l'ultima claſſe, cioè quella, che ſta più a ſiniſtra, non importa, che ſia compoſta d'un minor numero di figure, del quale lo ſono le altre, anche da una ſola.

2.º Si eſtragga (Tav. 1.ª) dall' ultima claſſe la radice vera, o proſſimamente minore della cercata; eſſa ſarà la prima parte, oſſia la più alta figura della radice cercata.

3.º Si ſottragga dall' ultima claſſe del dato numero A la potenza della radice trovata, d'eſponente eguale all' eſponente della radice cercata; ſi chiami B il reſiduo.

4.º Si premettano verſo la deſtra della parte radicale trovata tanti zeri, quante ſono le claſſi del dato numero, una meno; ſi chiami C il prodotto.

5.º Si alzi C alla potenza d'eſponente eguale all' eſponente della radice cercata meno due unità, e per il prodotto di queſta potenza multiplicata per l'eſponente della radice cercata ſi divida B; il quoto ſarà il cercato dividendo D.

$$D = \frac{B}{\overline{m-1}\,C^{m-2}} \ldots\ldots B = A - C^{m-1}$$

Membri della diviſione. Si ſepari da deſtra a ſiniſtra il dividendo D, come nelle radici quadrate; la prima claſſe a ſiniſtra meno l'ultima figura della claſſe medeſima ſarà il primo membro della diviſione: Il reſiduo del minutore ſottratto da tutta intera queſta prima claſſe, con la claſſe, che immediatamente la ſegue verſo la deſtra (meno l'ultima figura) ſarà il ſecondo membro della diviſione, e così nel reſto fino a comprendere in qualche membro di diviſione tutte le claſſi del dividendo una ad una, come nell' ordinaria diviſione.

Diviſori. Si prenda ſempre nell' operazione ſeguente per diviſore tutto intero il numero radicale E trovato colle precedenti diviſioni; il primo diviſore però ſarà in qualunque eſtrazione di radici la prima parte trovata nella preparazione di A.
Minutori. Si multiplichi il quadrato di E per l'eſponente della radice cercata ſminuito d'un' unità; alla metà del prodotto ſi aggiunga il decuplo del diviſore multiplicato per E; ſi avrà il minutore M.

$$M = CE + \frac{m-2}{2} E^2$$

Eſempio. Si cerchi la radice quarta di 27.9841... A. La radice quarta della prima claſſe 27 è 2; ſottraendo $(2)^4$ da 27, ſi ha per reſiduo 11, che congiunto all' altra claſſe da 119841... B; mettendo un zero avanti alla prima parte radicale 2 a ragione del numero delle claſſi, ſi ha 20..... C. La potenza d'eſponente 4 — 2 di C è 400, che multiplicata per 4 eſponente della radice da 1600; e dividendo B per 1600, ſi ha 74, 9... D. Dividendo la claſſe 74 meno la prima figura 4, cioè dividendo 7 per la trovata figura radicale 2, ſi ha per quoto 3.... E e quindi $CE = 60$

$$\frac{m-2}{2} E^2 = \frac{27}{2}$$

$$\text{cioè } M = 60 + \frac{27}{2} = 73,5$$

da ſottrarſi dall' intera claſſe 74; il reſiduo 0, 5 congiunto colle altre figure 0, 90, cioè 1, 4 è da traſcurarſi.

27. Queſto reſiduo da traſcurarſi, è la maggiore difficoltà, che s'incontri nell' applicazione a' numeri della noſtra formola. Per quale ragione s'ha a traſcurare l'ultimo reſiduo? e ſe ſi deve traſcurare, perchè mai s'ingiunge di fare l'ultima ſottrazione, coll' inutile calcolo di trovare l'ultimo valore di M? Fa an-

ancora ſorpreſa il vedere, che cercando col noſtro metodo le radici de' quadrati perfetti ſi ha ſempre zero per reſiduo, e nelle altre potenze di grado più elevato, e comunque perfette, ſi ha ſempre un reſiduo maggiore del zero. Ma ſi rifletta 1.° alla natura de' minutori, che ſi adoperano in ciaſcuna operazione. Nelle radici quadrate D è rigoroſamente eguale ad M; cioè $D = M$, donde $D - M = 0$; ma nelle altre radici qualunque, anche di potenze perfette, D è eguale ad M, ed a qualche coſa di più; a cagione d'eſempio: Se $m - 1 = 4$ come nel caſo noſtro, ſarà $D = \left(C + \frac{3}{2}E\right)E + \frac{E^3}{C} + \frac{E^4}{4C^2} = M + \left(E + \frac{E^2}{4C}\right)\frac{E^2}{C^2}$;

perciò è, che ſottraendo da D il ſolo M, non ſi ſottrae tutta quella quantità, che ſola potrebbe rendere il reſiduo eguale a zero.
Si rifletta in 2.° luogo, che il più delle volte non ſi prende per D l'eſatto valore di $\frac{B}{\overline{m-1}\, C^{m-3}}$, ma un valore approſſimato in decimali; come nell' eſempio addotto s'è preſo per D il numero 74, 9, quando dovrebbe eſſere $74, 9\frac{1}{16}$; quindi, comunque il minutore foſſe ſempre eſatto, non ſi avrebbe ſempre zero per reſiduo, dovendoſi perciò ſottrarre l'eſatto minutore $M + N$ da un eſatto D. Di fatti correggendo nel noſtro eſempio queſte due origini d'errore, ſi avrà zero per reſiduo

$$D = 74, 9\tfrac{1}{16} \ldots\ldots \quad M = 73,5$$

$$E = 3 \qquad N = 1, 4\tfrac{1}{16}$$

$$C = 20$$

donde $D = M + N$, cioè $74, 9\frac{1}{16} = 73, 5 + 1, 4\frac{1}{16}$

U 2 Quan-

Quanto all' ultima ſottrazione; eſſa non è inutile come ſembra a primo aſpetto. Si fa queſt' ultima ſottrazione per vedere ſe l'ultima figura radicale è maggiore del giuſto: Suppongo, che nelle figure radicali ſi mettano ſempre i quoti maſſimi delle particolari diviſioni, e perciò, ſe ſi veda, che il minutore è maggiore del membro intero della diviſione, ſi avrà un ſegno ſicuro che la figura radicale E, che lo ha prodotto, dovrà ſminuirſi d'un' unità, di due, di tre...., finchè M non ſia maggiore del membro della diviſione.

28. Non va diſſimulato un notabile incomodo di queſto metodo, comunque egli ſia aſſai ſemplice, e ſpedito, e perciò degno d'eſſere preferito ad ogni altro. Negli altri metodi, ſe ſi ha zero per ultimo reſiduo, egli è certo, che il dato numemero è potenza perfetta di grado dato; ſe ſi ha un reſiduo maggiore di zero, il numero dato è veramente una potenza imperfetta: Nel noſtro, fuori della quadrata, ſi ha in qualunque eſtrazione di radici qualche reſiduo maggiore del zero; ſe non ſi corregge il D, e l'M con lunghi calcoli, ed il mezzo più ſemplice, ma pur nojoſo, per vedere ſe il dato numero è potenza perfetta, o no, è d'alzare la radice trovata alla potenza di grado dato, e ſe queſta potenza A' ſarà eguale al dato numero, il dato numero ſarà potenza perfetta, altrimenti no.

29. Quando A ſia una potenza imperfetta: 1.° Si ſottragga A' da A, e ſarà $A-A'=B'$, ed operando ſopra queſto ſecondo B, come s'è fatto ſul primo (prendendo per C la radice trovata), ſi avrà una nuova approſſimazione alla radice vera, maſſime aggiungendo a B' varj zeri per figure decimali.
2.° Se venga limitato il numero delle figure da averſi nella radice approſſimata, non è neceſſario cercar'e tutte col metodo eſpoſto, ma ſolamente fino ad una figura di più della metà del numero determinato di figure; per trovare poi le altre, baſta l'ordinaria diviſione dell' ultimo reſiduo colla radice trovata. Si cer-

cerchi la radice quadrata di 7, con dodici figure: Col metodo ſpiegato ſi troveranno le prime ſette figure 2, 645751, coll' ultimo reſiduo 822999; ſi divida queſt' ultimo reſiduo per la radice trovata, fino ad avere cinque figure, ſi avrà per quoto 31106, e la radice ſeconda di 7, ſarà 2, 64575131106. Queſta è una elegante proprietà del noſtro metodo.

30. In ogni evoluzione de' radicali numerici, c' entrano adunque tre quantità; B, D, M.

Per il ſecondo grado... $B=A-C^2$

$$D=\frac{B}{2C^0}=\frac{1}{2}B$$

$$M=\left(C+\frac{1}{2}E\right)E$$

Per il terzo grado..... $B=A-C^3$

$$D=\frac{B}{3C}$$

$$M=(C+E)E$$

Per il quarto grado.... $B=A-C^4$

$$D=\frac{B}{4C^2}$$

$$M=\left(C+\frac{3}{2}E\right)E$$

.... ec.

E' facile a vederſi la legge di tutti i B, C, M; a cagione d'eſempio negli M ſi diſtinguono due parti; la prima è ſempre CE; e per la ſeconda parte conviene ſeparare gli M in due claſſi di radici; cioè le radici d'eſponente pari, come la ſeconda, la quarta, la ſeſta....., e le radici d'eſponente impari, come la terza,

terza, la quinta, la ſettima ..... Nelle radici della prima claſſe la ſeconda parte del minutore è ſempre $\frac{1}{2}E^2$ multiplicato per un termine della ſerie impari 1 . 3 . 5 . 7 ... ec.; Nelle radici della ſeconda claſſe, la ſeconda parte del minutore è ſempre E^2 multiplicato per un termine della ſerie naturale 1 . 2 . 3 ... ec., ſecondo l'ordine de' gradi, o degli eſponenti del dato radicale. Baſtano le rifleſſioni fatte ſulla formola del num. 21. per fare comprendere il modo d'applicare le altre formole algebraiche ai numeri.

Evoluzione delle radici nelle equazioni compoſte.

31. A Due forme, e non più, ſi riducono tutte le equazioni compoſte; altre hanno la forma $x^{m-1}=A$, e ſi chiamano equazioni *non affette* d'altri termini; altre hanno la forma $ax+bx^2+cx^3+\ldots\ldots$ ec. $=A$, e ſi chiamano equazioni affette. L'equazioni di primo genere ſi ſciolgono coll'eſtrazione delle radici, avendoſi $x=\sqrt[m-1]{A}$; per le altre, oltre ai metodi eſpoſti nella introduzione, ſe ne deduce uno aſſai ſemplice dai metodi precedenti.

Si prenda ad arbitrio qualunque quantità C; ſe queſta ſarà una radice di x, ſi avrà $aC+bC^2+cC^3+\ldots$ ec. $=A$; ſe $aC+bC^2+\ldots$ ec. ſarà maggiore di A, quel primo C ſarà maggiore della radice cercata, e ſe ſarà minore di A, quel primo C ſarà minore della radice medeſima: Nel primo caſo ſi dovrà ſottrarre da C una quantità E, e nel ſecondo ſi dovrà aggiungere a C la quantità medeſima E, e nel primo caſo ſarà $x=C-E$, nel ſecondo ſarà $x=C+E$. Ci rimane adunque di trovare in amendue i caſi il valore di E; cerchiamolo nel ſecondo caſo, ed il metodo ſi adatterà da ſe ſteſſo al caſo primo.

1.° Se

1.° Se $C+E$ è il vero valore di x, ſi avranno le ſeguenti equazioni.

I. $ax = aC + aE$

II. $bx^2 = bC^2 + 2bCE + bE^2$

III. $cx^3 = cC^3 + 3cC^2E + 3cCE^2 + cE^3$

IV. $dx^4 = \ldots$ ec.

2.° Traſcurando i termini, in cui E ha più di due dimenſioni, ſi avrà

$aC + aE + bE^2 = A$

$bC^2 + 2bCE + 3cCE^2$

$cC^3 + 3cC^2E + \ldots$ ec.

.. ec. + ... ec.

3.° Facendo eguale ad l il primo termine cognito, la ſomma de' coefficienti di E eguale ad m, e la ſomma de' coefficienti di E^2 eguale ad n, ſi avrà $l+mE+nE^2=A$, ed $nE^2+mE=A-l=B$; dividendo queſt' equazione per n, ed eſtraendo le radici, ſi ha $E=\frac{-m\pm\sqrt{m^2+4nB.}}{2n}$

32. Si divida l'equazione $nE^2+mE=B$, 1.° per m; 2.° per $m+nE$;

Si avrà, 1.° $E=\frac{B}{m}$, traſcurando $\frac{n}{m}E^2$;

2.° $E=\frac{B}{m+nE}$; cioè, ſoſtituendo in queſt' ultima equazione il valore di E della prima, ſi avrà $E=\frac{B}{m+\frac{nB}{m}}$, e multi-

pli-

plicando per m i termini di queſta frazione, ſarà $E = \frac{mB}{m^2 + nB}$.

33. Su queſti valori approſſimati di E per le equazioni affette ſi facciano rifleſſioni ſimili a quelle, che ſi ſono fatte ſui valori di E per le equazioni non affette, o per l'evoluzione de' radicali. E' evidente inoltre, che quanto ſarà C più vicino al vero valore di x, ſarà più convergente il metodo: Per avere con facilità un valore approſſimato di x da prenderſi per C fino dalla prima operazione, eſpongo il metodo per trovare i limiti delle radici d'un' equazione.

Per l'equazione $x^2 + px - q = 0$, ſarà 1.° $x^2 + px = +q$

$$px < +q$$

$$x < +\frac{q}{p}$$

2.° $x^2 < +q$

$$x < \sqrt{q}$$

$$x^2 < x\sqrt{q}$$

$$x^2 + px < x\sqrt{q} + px$$

3.° $q < x\sqrt{q} + px$

$$q < (\sqrt{q} + p)x$$

$$\frac{q}{\sqrt{q} + p} < x$$

cioè i limiti delle radici ſaranno $\frac{q}{p}$, e $\frac{q}{\sqrt{q} + p}$; il primo maggiore, il ſecondo minore del valor vero. Allo ſteſſo modo ſi troveranno i limiti dell' equazione $x^2 - px + q = 0$, $p\ \frac{q}{p}$, ed i limiti dell' equazione $x^2 - px - q = 0$, $p + \sqrt{q}$, e $\sqrt{p^2 + q}$;

e così

e così nel reſto per le equazioni di grado più elevato del ſecondo. Nell' equazione $x^2 - 5x - 31 = 0$, i limiti ſono $\sqrt{56}$, e $5 + \sqrt{31}$, il primo minore, il ſecondo maggiore di x; Onde per applicarvi le formole ſi prenda $C = 8$, e ſi troverà dopo due periodi d'operazioni, cioè determinati da E, $x = 8,6032 \ldots$ ec.

34. Per non avere la noja di calcolare i radicali, e le frazioni, che in queſto metodo d'approſſimazione s'incontrano non di rado, ſi ſciolga ogni frazione, ed ogni radicale in numeri decimali, come nell' aritmetica comune. E' ſtato Newton il primo, che ha introdotti i decimali nelle equazioni con impareggiabile compendio, e facilità delle operazioni più intralciate.

X CAPO

CAPO SECONDO.

Serie, che naſcono dalle frazioni Algebraiche.

Primo metodo per l'evoluzione delle frazioni Algebraiche.

35. Il primo metodo per ſvolgere in ſerie una frazione qualunque $\frac{a^2}{b \pm x}$, è l'ordinaria diviſione algebraica. Dividendo a^2 per b, ſi ha per primo termine della ſerie $\frac{a^2}{b}$; ſottraendo da a^2 il prodotto $\frac{a^2}{b} \times (b \pm x)$, ſi ha per reſiduo $\mp \frac{a^2 x}{b}$; dividendo queſto reſiduo per b, ſi ha per ſecondo termine della ſerie $\mp \frac{a^2 x}{b^2}$, e procedendo con queſt' ordine, ſi avrà la ſerie

$$\frac{a^2}{b} \mp \frac{a^2 x}{b^2} + \frac{a^2 x^2}{b^3} \mp \frac{a^2 x^3}{b^4} + \ldots\ \text{ec.} = A.$$

Se la frazione foſſe $\frac{a^2}{x \pm b}$, ſarebbe la ſerie a lei eguale

$$\frac{a^2}{x} \mp \frac{a^2 b}{x^2} + \frac{a^2 b^2}{x^3} \mp \frac{a^2 b^3}{x^4} + \ldots\ \text{ec.} = B.$$

36. Se nella ſerie A ſia x minore di b, coſicchè $\frac{x}{b}$ ſia una frazione propria, la ſerie A ſarà convergente; dacchè b, e le potenze di b ſtanno al denominatore della ſerie, e ſempre più elevate d'un grado, che l'x del numeratore; ciocchè rende ſucceſſivamente minori i termini ſeguenti riſpetto ai precedenti; ciò ſi comprenderà meglio ſe alla ſerie A ſi dia la forma equivalente

$$\left(\frac{a^2}{b} \mp \frac{a^2 x}{b^2}\right) \times \left(1 + \frac{x^2}{b^2} + \frac{x^4}{b^4} + \frac{x^6}{b^6} + \ldots\ \text{ec.}\right);$$

Per la ragione contraria ſi proverà, che ſe $x < b$, la ſerie B ſarà divergente, maſſime ſe ſi riduca alla forma

$$\left(\frac{a^2}{x} \mp \frac{a^2 b}{x^2}\right) \times \left(1 + \frac{b^2}{x^2} + \frac{b^4}{x^4} + \frac{b^6}{x^6} \ldots\ \text{ec.}\right);$$

Collo ſteſſo metodo ſi potranno dedurre le ſerie equivalenti alla data frazione, poſto $b = x$; in queſto caſo ſarà meglio mutare la forma al denominatore, per non avere delle ſerie, o illuſorie, o falſe.

Secondo Metodo.

37. Si ſvolgono in ſerie le frazioni algebraiche colla formola delle potenze d'un binomio; E' evidente, che $\frac{a^2}{b \pm x} = a^2 (b \pm x)^{-1}$; ſi faccia $m - 1 = -1$, cioè $m = 0$, $P = b$, $Q = x$, e ſi avrà $(b \pm x)^{-1} = 1 \mp b^{-2} x + b^{-3} x^2 \mp \ldots$ ec., e multiplicando i termini di queſta ſerie per a^2, ſi avrà la ſerie A del num. 35.. Si dica lo ſteſſo negli altri caſi.

38. E' evidente, che i due metodi precedenti ſi applicano del pari alle frazioni di termini comunque compleſſi; invece di uſare la formola del binomio, riuſcirà più ſpedito il calcolo per molte frazioni colla formola dell'infinitinomio, ma creſcerà ſempre la complicazione del calcolo col creſcere i termini delle quantità compleſſe, che ſi mettano al numeratore, o al denominatore delle date frazioni. Paſſo a ſpiegare un altro metodo più elegante, con cui agevolmente ſi coſtruirà una tavola per le frazioni di termini infinitinomi.

Terzo

Terzo Metodo.

39. Sia data la frazione $\frac{a}{b+cx}$; Si ſupponga $\frac{a}{b+cx} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \ldots\ldots$ ec., reſtano a determinarſi i coefficienti A, B, $C\ldots$ ec. Multiplicando l'equazione per $b+x$, ſi ha

$$\begin{aligned} a = bA + bBx + bCx^2 \ldots\ldots \text{ ec.} \\ + cAx + cBx^2 \ldots\ldots \text{ ec.,} \end{aligned}$$

e paragonando i termini corriſpondenti ne' due membri di queſta equazione, ſi ha

$$\begin{aligned} bA &= a \\ bB + cA &= 0 \\ bC + cB &= 0 \\ \ldots & \text{ ec.} \end{aligned}$$

Dalla prima equazione ſi ha $A = \frac{a}{b}$; con queſto valore di A, e colla ſeconda equazione, ſi ha $B = -\frac{ca^2}{b^2}$, e quindi colla terza $C = \ldots$ ec.; cioè con quelle equazioni di primo grado ſi determineranno i coefficienti cercati, e dopo tre, o quattro determinazioni ſi vedrà la legge della ſerie, e ſi avrà

$$\frac{a}{b+cx} = \frac{a}{b} \times \left(1 - \frac{c}{b}x + \frac{c^2}{b^2}x^2 - \frac{c^3}{b^3}x^3 \ldots \text{ ec.}\right)$$

40. Conſiderando attentamente i termini di queſta ſerie, ſi ha il coefficiente Q di qualunque termine, dato il coefficiente P del termine precedente, eſſendo $Q = \frac{cP}{b}$, ed avendoſi ſempre $A = \frac{a}{b}$, ſi avranno ſucceſſivamente tutti gli altri. Anzi il coefficiente

ciente

ciente di qualunque termine x^n è eguale a $\pm \frac{ac^n}{b^{n+1}}$; il + è per l'n numero pari, il − è per l'n impari, e generalmente il coefficiente di x^n è $\frac{a}{b}\left(-\frac{c}{b}\right)^n$

41. Applicando il medeſimo metodo alle frazioni di denominatori trinomj; dati P, Q coefficienti di due termini, ſi avrà il coefficiente del ſeguente termine, cioè

$R = -\frac{cQ + dP}{b}$; per i denominatori quadrinomj, ſarà

$S = -\frac{cR + dQ + eP}{b}$; cioè ſi ha il coefficiente S dati i coefficienti de' tre termini precedenti, e facendo

$$\frac{a + bx + cx^2 + dx^3 \ldots \text{ ec.}}{1 - gx - hx^2 - ix^3 \ldots \text{ ec.}} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \ldots\ldots\ldots$$

$+ Px^n + Qx^{n+1} + Rx^{n+2} + Sx^{n+3} \ldots\ldots$ ec. Si ha

$$\begin{aligned} A &= a \\ B &= gA + b \\ C &= gB + hA + c \\ D &= gC + hB + iA + d \\ E &= gD + hC + iB + lA + e \\ \ldots\ldots & \text{ ec.} \end{aligned}$$

E' chiara la legge di queſta ſerie: i coefficienti della prima colonna ſono ſempre g, della ſeconda h, della terza $i\ldots\ldots$ coll' ordine alfabetico g, h, i, l, $m\ldots$ ec.; le lettere majuſcole ſtanno in ciaſcuna colonna coll' ordine alfabetico A, B, C, $D\ldots$ ec., e coll' ordine alfabetico ſi ſuccedono gli ultimi termini delle colonne a, b, c, $d\ldots$ ec.

42. Se

42. Se la frazione aveſſe la forma $\frac{a+bx+cx^2 \ldots + bx^n}{(1-ix)^{m+1}}$;

Si avrà collo ſteſſo metodo il coefficiente del termine diſtinto da x^n nella ſerie indeterminata.

per $m=1$

$$\frac{n+1}{1}\, i^n a + \frac{n}{1}\, i^{n-1} b$$

per $m=2$

$$\frac{\overline{n+1}\,.\,\overline{n+2}}{1\,.\,2}\, i^n a + \frac{n\,.\,\overline{n+1}}{1\,.\,2}\, i^{n-1} b + \frac{n\,.\,\overline{n-1}}{1\,.\,2}\, i^{n-1} c$$

per $m=3$

$$\frac{\overline{n+1}\,.\,\overline{n+2}\,.\,\overline{n+3}}{1\,.\,2\,.\,3}\, i^n a + \frac{n\,.\,\overline{n-1}\,.\,\overline{n+2}}{1\,.\,2\,.\,3}\, i^{n-1} b$$
$$+ \frac{n\,.\,\overline{n-1}\,.\,\overline{n+2}}{1\,.\,2\,.\,3}\, i^{n-2} c + \frac{n\,.\,\overline{n-1}\,.\,\overline{n-2}}{1\,.\,2\,.\,3}\, i^{n-3} d$$

per $m=4$

$\ldots\ldots\ldots$ ec.

43. E più generalmente ancora, ſe la frazione avrà la forma

$$\frac{1}{(1-ax-bx^2-cx^3-\ldots\ \text{ec.})^{m+1}}$$

ciaſcun coefficiente S ſi determinerà da' coefficienti di tanti termini precedenti, quante ſono le lettere a, b, c, d; e ſi avrà

$$S=\frac{m+n}{n}\,aR+\frac{2m+n}{n}\,bQ+\frac{3m+n}{n}\,cP+\frac{4m+n}{n}\,dO+\ldots\ \text{ec.}$$

44. Si noti, che ſe il primo termine del denominatore della data frazione non foſſe un termine conoſciuto, come ſempre abbiamo ſuppoſto fin qui, colla ſemplice diviſione ſi ridurrà alle formole ſpiegate.

Sia,

Sia, a cagione d'eſempio, data la frazione $\frac{a+bx+cx^2 \ldots \text{ec.}}{fx-gx^2-bx^3 \ldots \text{ec.}}$ $=Z$; ſi avrà $Z=\frac{a+bx+cx^2 \ldots \text{ec.}}{x(f-gx-bx^2 \ldots \text{ec.})}$; e determinato $A+Bx+Cx^2+\ldots$ ec. $=\frac{a+bx+cx^2 \ldots \text{ec.}}{f-gx-bx^2 \ldots \text{ec.}}$; ſarà $Z=\frac{1}{x}(A+Bx+Cx^2+\ldots$ ec.$)$; E' manifeſto il modo di ridurre il denominatore ad avere per primo termine l'unità, quando prima ſiaſi ridotto ad avere per primo termine una quantità coſtante.

Spezzamento delle frazioni.

45. Sia la frazione $\frac{a+x^n}{(e+fx)^p\,(g+bx)^q\,(k+lx)^r \ldots \text{ec.}}$, ed $n<(p+q+r+\ldots\ \text{ec.})$

1.º Si ſupponga la data frazione rappreſentata da

$$\frac{A+Bx+Cx^2 \ldots\ldots + Fx^{p-1}}{(e+fx)^p}+\frac{G+Hx+Ix^2 \ldots + Mx^{q-1}}{(g+bx)^q}$$
$$+\frac{N+Px+Qx^2 \ldots + Tx^{r-1}}{(k+lx)^r}+\ldots\ \text{ec.}$$

2.º Multiplicando la propoſta equazione, e la frazione indeterminata, per il denominatore della propoſta, ſi ha

$$a+x^n=(A+Bx+Cx^2 \ldots + Fx^{p-1})\,(g+bx)^q\,(k+lx)^r \ldots$$
$$+(G+Hx+Ix^2 \ldots\ldots Mx^{q-1})\,(e+fx)^p\,(k+lx)^r \ldots + \ldots\ \text{ec.}$$

3.º Ordinando il ſecondo membro dell'equazione per x, e paragonando i termini de' due membri, ſi avranno tante equazioni, quante ſono le lettere indeterminate A, $B \ldots$ ec. donde ſi avranno no i valori di A, B, C.... da sostituirsi nella frazione indeterminata.

Esempio. Nella frazione $\frac{1+z^2}{z(1-z)(1+z)}$, dovendosi pel metodo prendere tanti termini del numeratore indeterminato, quante sono unità nell'esponente di z del dato fattore, si ha

$\frac{1+z^2}{z(1-z)(1+z)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{1-z} + \frac{C}{1+z}$; e multiplicando l'equazione per il prodotto de' dati fattori, si ha

$$\begin{aligned} 1+z^2 = -Az^2 &+ Bz + A. \\ +Bz^2 &+ Cz \\ -Cz^2 & \end{aligned}$$

paragonando i termini de' due membri di quest'equazione, si ha

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ B+C &= 0 \\ -A+B-C &= 1; \end{aligned}$$

donde $A=1$

$B=1$

$C=-1$, ed $\frac{1+z^2}{z(1-z)(1+z)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z}$

46. Non è necessario fare le multiplicazioni indicate nel metodo, e di ordinare per x il prodotto, come nell'esempio precedente. Si suppongano eguali a zero, uno, ad uno, i denominatori dati, e ciascuna di queste supposizioni ci darà nell'equazione ridotta il valore d'una delle indeterminate. Nel nostro esempio, si ha

$$1+z^2 = A(\overline{1-z}.\overline{1+z}) + B(z.\overline{1+z}) + C(z.\overline{1-z}).$$

fatto

fatto il primo fattore $z=0$, l'equazione si riduce ad $1=A$.

fatto il secondo fattore $1-z=0$, si ha $z=1$, e l'equazione si riduce ad $1+1 = A(\overline{1-1}.\overline{1+1}) + B(1.\overline{1+1}) + C(1.\overline{1-1})$ cioè a $2=2B$; donde $B=1$.

fatto il terzo fattore $1+z=0$; si ha allo stesso modo $z=-1$, e $C=-1$.

47. Dalla forma della frazione indeterminata, si vede, che tutti i fattori eguali del dato denominatore devono formare un solo fattore nelle frazioni spezzate; il problema altrimenti ci mena all'impossibile. Sia la frazione

$\frac{1-2z+3z^2-4z^3}{(z-1)(z-1)(z-2)(2z-1)}$; comunque siano quattro i fattori del denominatore, non si possono avere che tre frazioni equivalenti, ed una delle spezzate deve avere per denominatore il prodotto $(z-1)(z-1)$, cioè $(z-1)^2$; in una parola, i denominatori delle frazioni spezzate devono essere primi tra se.

48. Se le radici del denominatore sono imaginarie; 1.° Sia

$\frac{x^m}{L+Mx+Nx^2 \ldots\ldots + Ux^n}$; (si suppone sempre $m<n$)

$= \frac{A+Bx}{a+bx+cx^2} + \frac{C+Dx}{e+fx+gx^2} + \frac{E+Fx}{h+kx+lx^2} + \ldots$ ec.; e sia $(e+fx+gx^2)(h+kx+lx^2) = \mathfrak{Q}$; $(a+bx+cx^2)(h+kx+lx^2) = R$; $(a+bx+cx^2)(e+fx+gx^2) = S$; sarà, secondo il metodo generale, $x^m = (A+Bx)\mathfrak{Q} + (C+Dx)R + (E+Fx)S + \ldots$ ec.; e supponendo (num. 46.) $a+bx+cx^2=0$, sarà $R=0$, $S=0$; donde $x^m = (A+Bx)\mathfrak{Q}$.

2.° Siano

2.° Siano di più le radici imaginarie di $a + bx + cx^2 = 0$, rappreſentate da $t + px = 0$, $p + qx = 0$; ſarà $x = -\frac{t}{r}$, ed $x = -\frac{p}{q}$; e per $x = -\frac{t}{r}$, ſi ha $\mathfrak{Q} = \left(e + f(-\frac{t}{r}) + g(\frac{t^2}{r^2})\right)$ $\times \left(h + k(-\frac{t}{r}) + l(\frac{t^2}{r^2})\right)$, ed allo ſteſſo modo ſi avrà un altro valore di $\mathfrak{Q}$, cioè $\mathfrak{Q}'$, per l'altro valore di $x = -\frac{p}{q}$.

3.° Si avranno adunque invece di $x^m = (A + Bx)\mathfrak{Q}$ le due ſeguenti equazioni,

$$\text{cioè } -\frac{t^m}{r^m} = (A + Bx)\mathfrak{Q} \ldots \text{ ed } A = -\frac{t^m}{r^m} : \mathfrak{Q} + \frac{t}{r}B$$

$$-\frac{p^m}{q^m} = (A + Bx)\mathfrak{Q}' \ldots\ldots A = -\frac{p^m}{q^m} : \mathfrak{Q}' + \frac{p}{q}B.$$

Paragonando inſieme queſti due valori di A, ſi avrà il valore di B, e ſoſtituendo queſto valore di B nelle due equazioni, che hanno dati i due valori di A, ſi avrà il valore di A.

4.° Ciocchè s'è fatto ſul fattore $a + bx + cx^2$, ſi faccia altresì ſu ciaſcuno degli altri, e collo ſteſſo metodo ſi avranno ſempre i valori delle indeterminate.

49. Se le radici del denominatore ſono in parte reali, in parte imaginarie; non v'ha differenza alcuna ne' principj, e nelle deduzioni del calcolo. Eulero dal compendio del num. 45. deduce un aſſai elegante teorema per rompere le frazioni, che hanno per fattore de' loro denominatori una quantità della forma $(p - qx)^n$: baſti accennarlo, la dimoſtrazione è facile. Sia $\frac{M}{N}$

$\frac{M}{N}$ la frazione data, ed $N = (p - qx)^n X$; fatto $A = \frac{M}{X}$

$$P = \frac{M - AX}{p - qx} \qquad B = \frac{P}{X}$$

$$\mathfrak{Q} = \frac{P - BX}{p - qx} \qquad C = \frac{\mathfrak{Q}}{X}$$

$$R = \frac{\mathfrak{Q} - CX}{p - qx} \qquad D = \frac{R}{X}$$

$$\ldots \text{ ec.} \qquad \ldots \text{ ec.}$$

$$\text{Sarà } \frac{M}{N} = \frac{A}{(p - qx)^n} + \frac{B}{(p - qx)^{n-1}} + \frac{C}{(p - qx)^{n-2}} \ldots + \frac{K}{p - qx}.$$

Si ſuppone, che in M, ed in X ſi metta il valore di x cavato dall'equazione $p - qx = 0$, cioè $x = \frac{p}{q}$.

50. L'ultimo problema ſullo ſpezzamento delle frazioni, è *di ſpezzare una data frazione in più altre, che ſiano tante in numero, quanti ſono i fattori della data, ed abbiano ciaſcuna il numeratore eguale al numeratore della medeſima.*

E' evidente, che ogni frazione ſi può ridurre ad avere per numeratore l'unità; così $\frac{a}{b}$ è eguale ad a multiplicato per $\frac{1}{b}$. Si potrà adunque ſupporre, che il numeratore della data, e delle cercate frazioni ſia l'unità, e dopo ſpezzata la frazione data, e ridotta in queſta forma, baſterà mettere il dato numeratore per numeratore delle frazioni ſpezzate invece dell'unità.

51. Siano adunque date le frazioni $\frac{1}{xy}$, $\frac{1}{xyz}$, $\frac{1}{xyzv}$, .. ec.

 Sarà

Sarà $\frac{1}{xy} = \frac{1}{x(y-x)} + \frac{1}{y(x-y)}$

$$\frac{1}{xyz} = \frac{1}{x(y-x)(z-x)} + \frac{1}{y(x-y)(z-y)} + \frac{1}{z(x-z)(y-z)}$$

$$\frac{1}{xyzv} = \frac{1}{x(y-x)(z-x)(v-x)} + \ldots \text{ ec.}$$

..... ec.

Cioè ognuna delle frazioni parziali avrà per denominatore uno de' dati fattori multiplicato per tutti i binomi, che ſi formano, ſottraendo eſſo da tutti gli altri; ed in fatti, riducendo al comune denominatore le equazioni precedenti, ſi troverà per numeratore d'amendue i membri la ſteſſa quantità.

52. Nel fare queſta riduzione al comune denominatore, ſi noti: 1.° Che ne' denominatori del ſecondo membro delle precedenti equazioni ogni binomio viene due volte lo ſteſſo, ma co' ſegni contrarj, eſſendo, a cagione d'eſempio, il binomio $y-x$, che ſta al primo termine del ſecondo membro nella prima equazione affatto eguale al binomio $x-y$, che ſta al ſecondo termine del membro medeſimo; quindi, riducendoſi tutti, a due, a due, ad una ſteſſa forma, ſi ſcemerà per metà il loro numero, e però anche la fatica del calcolo ne' caſi più compoſti.

2.° Nel mutare queſti ſegni ſarà bene ſerbare un ordine coſtante, mettendo ſempre per poſitivo quel fattore, che ove ſono ſcritti i fattori nella frazione data è ſcritto il primo, prendendo a cagione d'eſempio nella terza equazione i ſoli $x-y$, $x-z$, $x-v$, $y-z$, $y-v$, $z-v$. In queſto modo nel primo termine d'ogni ſecondo membro ſi muteranno tutti i ſegni de' binomj, nel ſecondo ne reſterà un ſolo non mutato, nel terzo due, ... e nell' ultimo non ſe ne muterà alcuno. Quindi baſterà la-

laſciare all' ultimo termine il ſuo ſegno poſitivo, e mutarlo alternativamente ne' precedenti.

53. Fatta colle premeſſe due avvertenze la riduzione delle equazioni poſte al num. 51., ſi avrà

I. per $\frac{1}{xy}$

$$x-y = -y + x$$

II. per $\frac{1}{xyz}$

$$(x-y)(x-z)(y-z) = yz(y-z) - xz(x-z) + xy(x-y)$$

III. per $\frac{1}{xyzv}$

$$\begin{aligned}(x-y)(x-z)(x-v)(y-z)(y-v)(z-v) \\ = -yzv(y-z)(y-v)(z-v) \\ + xzv(x-z)(x-v)(z-v) \\ + xyv(x-y)(x-v)(y-v) \\ - xyz(x-y)(x-z)(y-z)\end{aligned}$$

IV. per ... ec.

In ciaſcuna di queſte equazioni, il primo membro è ſempre eguale al prodotto delle differenze di ciaſcuno de' dati fattori ſopra tutti i ſeguenti, ed ogni termine del ſecondo membro è ſempre eguale al prodotto di tutti i fattori (toltone nel primo il primo, nel ſecondo il ſecondo ..... fattore), ma multiplicato per tutti i binomj delle differenze de' medeſimi, preſe coll' ordine accennato.

54. Se ſi proverà l'ugualianza de' due membri di queſte ſuppoſte equazioni, reſterà dimoſtrato il teorema del num. 51., donde ſon nati. Ora; 1.° Nella I.ª ſi vede l'ugualianza de' due membri dall' identità della eſpreſſione.

2.° Nella

2.° Nella II.ª il calcolo è facile; vengono, colla multiplicazione attuale, nel primo membro otto termini, e nel secondo sei; ma in quello se ne distruggono due $\pm xyz$, e rimangono in amendue membri i medesimi sei termini, che ordinati in modo che incomincino colla potenza d'esponente 1, e con quell'ordine, con cui sono scritti nella data frazione, sono

$$-xy^2 + yx^2 - zx^2$$
$$+ xz^2 - yz^2 + zy^2$$

3.° Nella III.ª il calcolo attuale resta molto più lungo. Nel primo membro essendovi sei binomj, e portando la multiplicazione per ogni nuovo binomio il raddoppiamento de' termini, si devono avere termini $(2)^6 = 64$, e nel secondo membro portando ciascuno de' quattro termini, dopo la sua evoluzione, sei nuovi termini, corrispondenti a' suoi tre fattori binomj, vi saranno in tutto termini 24. Quindi nel primo membro, perchè resti l'ugualianza, se ne devono distruggere 40. Si vede anche facilmente quali sieno quegli, che vi devono rimanere.

55. Facciamo qualche riflessione di più su i termini, che devono elidersi, o restare ne' membri dell'equazione III.ª. Nella evoluzione de' tre binomj fatta al num. precedente per l'equazione II.ª sono rimasti tutti, e soli que' termini, che avevano la prima potenza di un fattore, unita colla seconda di un altro. Questo accaderà anche qui in ogni termine del secondo membro, rispetto a que' tre fattori, che entrano nella composizione de' quattro suoi termini; multiplicando tutti que' termini nati così per tutti que' fattori medesimi, quello, che era elevato alla seconda potenza, lo sarà alla terza, l'altro che aveva la prima, salirà alla seconda, e vi si troverà di nuovo quello che mancava in quel termine: Per esempio, nell'ultimo termine del secondo membro deve nascere xy^2, xz^2, e colla multiplicazione per xyz verrà zx^2y^3, yx^2z^3. Quindi anche nella evoluzione del

del primo membro, per avere l'ugualtà col membro secondo, devono restare tutti, e soli que' termini, che hanno tutte le combinazioni possibili delle tre diverse potenze di tre diversi fattori. Ora appunto ciò accade, se si fa l'evoluzione attuale: Per farla ordinatamente, si scrivano i binomj con quell'ordine, con cui sopravvengano al sopravvenire de' nuovi fattori. Gli metterò qui così ridotti, e gli contrassegnerò colla lettera A; gli separerò gli uni dagli altri con virgole, che non significhino interrotta la continuazione della multiplicazione, ma solo mostrino la pertinenza ad un fattore di più; fino alla prima virgola appartengono ai soli xy, fino alla seconda agli xyz, e presi che siano tutti insieme appartengono agli $xyzv$.

Finalmente svolgerò coll'attuale multiplicazione tutti i prodotti contraddistinguendogli coi B, C, D... ec., e ne soggiungerò dopo la spiegazione.

56. *A*

$$(x-y),\ (x-z)(y-z),\ (x-v)(y-v)(z-v)$$

B

$$(x-y)\times\left(xy + \begin{matrix}(-x)\\(-y)\end{matrix} z + z^2\right)\times\left(xyz + \begin{matrix}(-xy)\\(-yz)\\(-yz)\end{matrix} v + \begin{matrix}(x)\\(y)\\(z)\end{matrix} v^2 - z^3\right)$$

C

$$xy + \begin{matrix}(-x)\\(-y)\end{matrix} z + z^2$$

D

$$\begin{matrix}(+x)\\(-y)\end{matrix}$$

E

$$\begin{array}{c}(+yx^2)\\(-xy^2)\end{array} + \begin{array}[t]{l}\ast\,(-zx^2)\\(1)(-xyz)\\(1)(+xyz)\\\ast\,(+zy^2)\end{array} + \begin{array}{c}(xz^2)\\(-yz^2)\end{array}$$

F

$$xyz + \begin{array}{c}(-xyv)\\(-xzv)\\(-yzv)\end{array} + \begin{array}{c}(+xv^2)\\(+yv^2)\\(+zv^2)\end{array} - v^3$$

G

$$\begin{array}{c}(+yx^2)\\(-xy^2)\end{array} + \begin{array}{c}(-zx^2)\\(+zy^2)\end{array} + \begin{array}{c}(+xz^2)\\(-yz^2)\end{array}$$

H

$$\begin{array}{c}(+zy^2x^3)\\(-zx^2y^3)\end{array} + \begin{array}[t]{l}\ast\,(-vy^2x^3)\\(1)(-yzvx^3)\\(2)(-zvx^2y^2)\\\ast\,(+vx^2y^3)\\(2)(+zvx^2y^2)\\(3)(+xzvy^3)\end{array} + \begin{array}[t]{l}\ast\,(+yv^2x^3)\\(1)(+x^2y^2v^2)\\(2)(+yzx^2v^2)\\(1)(-x^2y^2v^2)\\\ast\,(-xv^2y^3)\\(3)(-xzy^2v^2)\end{array} + \begin{array}{c}(-yx^2v^3)\\(+xy^2v^3)\end{array}$$

I

$$\begin{array}{c}(-yz^2x^3)\\(+xz^2y^3)\end{array} + \begin{array}[t]{l}(1)(+yzvx^3)\\\ast\,(+vz^2x^3)\\(4)(+vyx^2z^2)\\(3)(-vxzy^3)\\(5)(-vxy^2z^2)\\\ast\,(-vz^2y^3)\end{array} + \begin{array}[t]{l}\ast\,(-zv^2x^3)\\(2)(-yzx^2v^2)\\(4)(-x^2z^2v^2)\\(3)(+xzy^2v^2)\\\ast\,(+zv^2y^3)\\(5)(+y^2z^2v^2)\end{array} + \begin{array}{c}(+zx^2v^3)\\(-zy^2v^3)\end{array}$$

K

$$\begin{array}{c}(+yx^2z^3)\\(-xy^2z^3)\end{array} + \begin{array}[t]{l}(4)(-vyx^2z^2)\\\ast\,(-vx^2z^3)\\(6)(-vxyz^3)\\(5)(+vxy^2z^2)\\(6)(+vxyz^3)\\\ast\,(+vy^2z^3)\end{array} + \begin{array}[t]{l}(4)(+x^2z^2v^2)\\(6)(+xyz^2v^2)\\\ast\,(+xv^2z^3)\\(6)(-xyz^2v^2)\\(5)(-y^2z^2v^2)\\\ast\,(-yv^2z^3)\end{array} + \begin{array}{c}(-xz^2v^3)\\(+yz^2v^3)\end{array}$$

57. In *B* vi ſono i binomj di *A* raccolti in tre fattori, formati come ſi uſa nelle equazioni compoſte, ma preſe a roveſcio, prendendo, per eſempio $(x-v)(y-v)(z-v)$ invece di $(v-x)(v-y)(v-z)$; vengono per tal guiſa le ſteſſe combinazioni de' prodotti, ma co' ſegni contrarj.

In *C* vi è la formola de' ſecondi due binomj, che ha tre colonne, ed in *D* ſta il primo binomio, per cui eſſa ſi deve multiplicare.

In *E* vi ſono tre colonne, nate dalla multiplicazione di *C* per *D*; la prima, e l'ultima colonna hanno due termini per ciaſcuna, che ſono della forma xy^2, xz^2, e reſtano: La colonna di mezzo ha due termini, che ſi diſtruggono, e ſono ſegnati col numero (1), e ne ha due che reſtano, e ſono ſegnati coll' aſteriſco.

In *F* vi è la formola, già ridotta, degli ultimi tre binomj di *A*, uniti in *B*; e in *G*, la formola già trovata in *E* è ridotta coll' ommettere i termini, che ſi elidono.

In *H*, *I*, *K* vi ſono i prodotti di *F* per le tre colonne di *G*, reſtandovi così quattro colonne, ciaſcuna delle quali ha tre membri corriſpondenti, una per una, alle tre colonne di *G*. Nella prima, ed ultima colonna non ſi diſtrugge nulla; nelle due di mezzo ſi elidono dodici termini per ciaſcuna, e ſono ſegnati col numero (1), (2)... ec.; rimangono due ſoli termini per membro, ed hanno la forma xyz^3, xy^2v^3, rimanendo eliſi tutti quegli della forma $x^2 y^2 v^2$. Qui ſe ne trovano ventiquattro eliſi, e ve ne ſarebbero altri ſedici, ſe nella ſeconda colonna di *G* ſi foſſero ritenuti que' due, che ſi ſono eliſi in *E*; giacchè multiplicando per eſſi gli otto termini di *F* ſi ſarebbero avuti otto termini per uno, durando ſempre i ſegni contrarj.

58. Quindi, raccogliendo i termini non eliſi in *H*, *I*, *K*, ed ordinandogli ſecondo le potenze, e l'ordine de' dati fattori, ſi ha il prodotto indicato in *A*, che è il primo membro dell' equazione III.ª, ma preſo col ſegno contrario; cioè

$$
\begin{array}{l}
- \; L \; - \; M \; - \; N \; - \; O \\
- x y^2 z^3 + x y^2 v^3 - x z^2 v^3 + y z^2 v^3 \\
+ x z^2 y^3 - x v^2 y^3 + x v^2 z^3 - y v^2 z^3 \\
+ y x^2 z^3 - y x^2 v^3 + z x^2 v^3 - z y^2 v^3 \\
- y z^2 x^3 + y v^2 x^3 - z v^2 x^3 + z v^2 y^3 \\
- z x^2 y^3 + v x^2 y^3 - v x^2 z^3 + v y^2 z^3 \\
+ z y^2 x^3 - v y^2 x^3 + v z^2 x^3 - v z^2 y^3
\end{array}
$$

e facendo la multiplicaztone attuale indicata in ciaſcun termine del ſecondo membro della medeſima equazione III.ª, ſi avrà

$$
\begin{array}{l}
- x y z (x - y)(x - z)(y - z) = L \\
+ x y v (x - y)(x - v)(y - v) = M \\
+ x z v (x - z)(x - v)(z - v) = N \\
- y z v (y - z)(y - v)(z - v) = O.
\end{array}
$$

Ciocchè moſtra ad evidenza, che l'equazione ſuppoſta al num. 53. per $\frac{1}{xyzv}$, è una vera equazione.

59. Per

59. Per quanti artificj ſi ſieno uſati a ſminuire il numero de' termini delle attuali multiplicazioni, ad ogni modo dal ſolo eſempio terzo (num. 53.) ſi vede chiaro, che ne' caſi un po più compoſti il calcolo diventa affatto impraticabile. Adoperando però cotali artificj, ſi vede almeno in varj eſempj la legge de' prodotti, per cui già ſi può credere generale il teorema, che abbiamo da prima propoſto.

60. Per dimoſtrarlo eſattamente, converrebbe 1.° generalmente dimoſtrare il ſeguente teorema.

Se dato un numero m *di quantità qualunque, ſi prendano tutti i binomj, che naſcono ſottraendo da qualunque delle precedenti, qualunque delle ſeguenti, e queſti binomj ſi multiplichino tutti tra ſe, vi reſteranno tutti, e ſoli que' termini, che ſi formano di quantità* m — 1, *elevate ciaſcuna alle potenze diverſe*, 1 . 2 . 3 ..... (m — 1), *diſtruggendoſi tutti gli altri.*

Dimoſtrato che foſſe queſto teorema, ſarebbe chiaro, che que' termini devono eſſere la ſomma di tutti quegli, che danno le combinazioni di eſſe preſe a $(m - 1)$ per volta, e multiplicate in tutti i binomj, che naſcono dalle loro differenze preſe coll' ordine già preſcritto; dacchè colle ſucceſſive multiplicazioni ſi fa entrare ne' termini un fattore di più, e ſi aumenta (num. 55.) d'un' unità l'eſponente de' primi.

2.° Converrebbe dimoſtrare, che i ſegni nati dal teorema ſuddetto, cioè i ſegni del primo membro dell' equazione ridotta (num. 53.), debban eſſere gli ſteſſi, che nel ſecondo membro. Ciò ſi potrebbe fare conſiderando tutte le combinazioni, che devono naſcere ne' prodotti, dalle quantità, e dai ſegni. In ogni termine vi deve entrare una delle due quantità d'ogni binomio, onde la ſomma delle potenze deve eſſere eguale al numero de' binomj; ciaſcuna quantità ſi trova in $m - 1$ binomj ed è combinata una volta per una colle quantità compagne, cioè negativamente colle precedenti, e poſitivamente colle ſeguenti; la

pri-

prima è sempre positiva, e l'ultima sempre negativa; ciascuna delle intermedie sono positive tante volte, quante sono quantità, che le vengon dopo, e tante volte negative, quante sono quelle, che la precedono.

Questi elementi guidano ad una dimostrazione generale del teorema del num. 50.

61. Intanto, si deduce con facilità dalle cose dette fin qui il numero de' binomj, e de' termini, che devono corrispondere a qualunque dato numero m di fattori, de' quali sia composto il denominatore della data frazione. Nel primo membro adunque dell' equazione formata come al num. 53., si avrà

Numero de' fattori

2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8

Numero de' binomj

1 . 3 . 6 . 10 . 15 . 21 . 28

Numero de' termini

2 . 8 . 64 . 1024 . 32768 . 2097152 . 268435456

Numero de' termini residui

2 . 6 . 24 . 120 . 720 . 5040 . 40320

O a dire più certo, e più in generale, il numero de' binomj sarà in ciascun caso $1+2+3\ldots+(m-1)$, cioè $\frac{m\,.\,m-1}{1\,.\,2}=n$; il numero de' termini sarà $(2)^n$; il numero de' residui sarà $1\times2\times3\times4\ldots\ldots\times m$, come si potrà vedere cercando co' metodi da spiegarsi nel capo seguente, i termini generali delle precedenti tre serie. Se non si dimezzava il numero de' binomj, si sarebbe avuto nella seconda riga precedente il doppio, e nella terza il quadrato di ogni numero ivi notato.

62. La Sig.ra Agnesi (Istituz. Anal. l. 3. num. 21.) dà qualche esempio di questo metodo di spezzare le frazioni, in ciascuno de' quali vi sono due soli, o al più tre fattori, ed hanno questa forma $\frac{p}{(x+b)(x+c)}$. Il precetto del metodo è espresso così: „ Dico, che questa sarà eguale a due frazioni, il nume-
„ ratore delle quali sia lo stesso di questa, ed i denominatori
„ sieno; della prima il prodotto d'una delle radici (cioè d'uno
„ de' fattori) nella differenza della quantità costante dell' altra
„ radice, e della quantità costante della radice posta; della se-
„ conda sia il prodotto dell' altra radice nella differenza della
„ costante della prima radice, e della costante di questa secon-
„ da ". L'applicazione a' suoi esempj si riduce qui ad essere $\frac{p}{(x+b)(x+c)}=\frac{p}{(x+b)(c-b)}+\frac{p}{(x+c)(b-c)}$; Si vede dall' esempio, che per differenza delle due radici intende la prima nominata, meno la seconda. Aggiunge poi „ se le radici fossero
„ tre, quattro.... ec. si proceda sempre collo stesso metodo "; indi per tutta dimostrazione dice „ ed in fatti riducendo al co-
„ mune denominatore le frazioni in tal guisa ritrovate, resti-
„ tuiranno esse la frazione prima donde sono nate.

63. Chi considera questo parlare della Sig.ra Agnesi, vedrà quanto poco vi si esprime di quello si richiede per un metodo generale. Basta considerare quel tanto poco, che vi vuole per due fattori, con quel tanto di più, che si richiede ove cresca il loro numero, vedrà facilmente, se il portare l'operazione a più fattori sia un semplice *procedere con quell' istesso metodo*, e con un metodo abbastanza spiegato. Non si vede ivi punto il progresso dell' operazione, che debba tenersi, ove i denominatori sieno più

più di due ; quali ſieno le differenze da prenderſi in ogni frazione, e da unire in ogni denominatore delle ſpezzate ; e con quale ordine ſi debbano prendere le differenze medeſime. Non vi ſi eſprime nemmeno , che il pigliare la differenza delle ſole coſtanti proviene dal principio più generale del dover prendere la differenza de' fattori , che negli eſempj addotti , i quali hanno un x medeſimo congiunto con diverſe coſtanti , ſi riduce alla differenza delle medeſime coſtanti. Innoltre da quanto s'è eſpoſto ſopra , ſi vede quanto ſia impraticabile il provare il metodo colla *nuda* , ed attuale riduzione allo ſteſſo denominatore, ove il numero de' fattori ſia maggior di due , o tre ; tanto più, che dall' Agneſi ſi piglia la ſteſſa differenza poſitivamente, e negativamente , onde nel metodo ſteſo a più fattori vi vorrebbe un numero di binomj doppio di quello s'è uſato qui ſopra , coſicchè , ove il numero de' fattori ſieno ſoli cinque , vi vorrebbe più d'un milione di termini , e per otto fattori , più di ſettanta mila milioni di milioni di termini.

64. Io mi ſono trovato in queſto labirinto di difficoltà , e dopo lungo andare mi ſembravano ineſtricabili ; mi ſon dovuto raggirare , ed arrampiccare quà , e là con una quantità prodigioſa di lunghiſſimi , e nojoſiſſimi calcoli. Ma al fine ho traviſto , e poſcia ho dedotto da me il teorema generale poſto al num. 51.; devo però confeſſare d'eſſermi , dopo tutto ciò , ſervito di molti lumi comunicatimi dal P. Boſcovich per rendere più ſpediti agli altri i medeſimi calcoli , per conoſcere la legge , che oſſervano i termini nell' eliderſi , e per iſvolgere i principj , da' quali dipende la generale , e rigoroſa dimoſtrazione.

65. Mi reſtano ad aggiungere quattro avvertenze. 1.° Non ha luogo il metodo eſpoſto quando nel denominatore della data frazione vi entrino due , o più fattori eguali ; dacchè trai binomj de' denominatori v'entrerebbe anche lo zero.
2.° In queſti caſi ſi conſideri la data frazione , come ſe aveſſe un

un ſolo di que' fattori eguali al denominatore ; ſi ſpezzi la data frazione , così conſiderata , col metodo ſpiegato , e ſi multiplichino i denominatori delle ſpezzate per il prodotto de' denominatori ommeſſi.
3.° Se uno , o più fattori del dato denominatore ſono compleſſi , P, P', P''... ec. , ſi faccia nelle formole del num. 51. $x = P$, $y = P'$... ec. , e l'operazione ſarà la ſteſſa.
4.° Il maggior uſo di queſto problema è ne' caſi , in cui i fattori compleſſi ſono compoſti di una ſteſſa variabile con una coſtante diverſa , della forma $x+a$, $x+b$, $x+c$... ec. , perchè allora tutti i binomj , che accompagnano ogni fattore nella frazione ſpezzata ſono compoſti di quantità coſtanti , reſtando così in ciaſcuna frazione la quantità variabile elevata alla prima ſola potenza.

Evoluzione delle frazioni continue.

66. SI chiama frazione continua quella frazione , il cui denominatore è formato da una quantità intera , e da una frazione , il cui denominatore è di bel nuovo compoſto da una intera quantità , e da una frazione , il cui denominatore .... ec. Aggiungendo a tutte le frazioni continue una quantità qualunque a, ſi avrà la forma ſeguente

$$a + \cfrac{a'}{b + \cfrac{b'}{c + \cfrac{c'}{d + \cfrac{d'}{e + \cfrac{e'}{\ldots\ \text{ec.}\ \ldots\ \text{ec.}}}}}}$$

67. E'

67. E' evidente, che

$$a = a$$

$$a + \frac{a'}{b} = \frac{ab + a'}{b}$$

$$a + \cfrac{a'}{b + \cfrac{b'}{c}} = \frac{abc + ab' + a'c}{bc + b'}$$

...... ec.

Le frazioni, che formano il ſecondo membro di queſte equazioni, ſi chiamano frazioni *equivalenti*, cioè equivalgono alle frazioni, che formano il membro primo; ed è evidente, che qualunque termine d'una frazione equivalente è eguale alla ſomma de' termini analogi delle due precedenti, ciaſcuno multiplicato per una nuova lettera; cioè, a cagione d'eſempio, il numeratore $abc + ab' + a'c$ della terza è eguale ai numeratori della ſeconda, e della prima, multiplicati, quello per c, e queſto per b'.

Da queſto teorema applicato a diverſe frazioni equivalenti, ſi ha un metodo facile per traſformare in una ſerie, qualunque frazione continua, che è il problema diretto.

68. Si diſpongano le frazioni equivalenti, trovate come al num. precedente, in una ſerie da ſiniſtra a deſtra, che incominci da a°; ſopra ciaſcun termine di queſta ſerie ſi ſcriva, a modo d'eſponente, l'ultimo denominatore della frazione corriſpondente al termine ſeguente, e ſotto il termine medeſimo ſi ſcriva l'ultimo numeratore della ſteſſa corriſpondente frazione: ſi avrà per l'eſempio addotto

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & \\ a^{\circ} & \dfrac{a}{1} & \dfrac{ab + a'}{b} & \dfrac{abc + ab' + a'c}{bc + b'} & \ldots \text{ ec.} \\ a' & b' & c' & d' & \end{array}$$

Per

Per trovare generalmente il termine R di queſta ſerie; ſiano $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$ i due termini, che immediatamente precedono l'R cercato verſo la ſiniſtra, e ſia p' l'indice inferiore dell' ultimo precedente $\frac{P}{P'}$, e q l'indice ſuperiore del primo precedente $\frac{Q}{Q'}$; ſarà

$$R = \frac{qQ + p'P}{qQ' + p'P'}$$

69. Si noti; 1.° Che s'è incominciata la ſerie di mezzo da a°, perchè la formola R rappreſentaſſe anche la frazione equivalente ad $a + \frac{a'}{b}$.

2.° Che eſſendo ſempre dati i primi due termini a°, a della ſerie di mezzo, e tutti gli eſponenti, ſi determineranno colla formola precedente tutti i termini R.

3.° Che determinando tutti gli R fino ad avere impiegato l'ultimo de' dati eſponenti, oſſia quello, che ſta più a deſtra, l'R, che gli corriſponderà, eſprimerà il vero valore eſatto della data frazione x, e gli altri R eſprimeranno ſolamente un valore di x approſſimato.

4.° Che chiamando R' il ſecondo termine a della ſerie di mezzo, andando verſo la deſtra, R'' il terzo, R''' il quarto, ... ec. ſi ha R' minore di x, R'' maggiore di x, R''' minore di x, ..., e così alternativamente, come è manifeſto dalla volgare teoría delle frazioni; coſicchè in generale, gli R che hanno un numero pari d'accenti ſono maggiori della data frazione, e gli R, che hanno un numero impari d'accenti ſono minori della medeſima.

70. Quindi finalmente; in qualunque frazione continua x, ſi ha

$$x = R' + (R'' - R') - (R'' - R''') + (R^{\mathrm{IV}} - R''') - (R^{\mathrm{IV}} - R^{\mathrm{V}}) + \ldots \text{ ec.}$$

71. Reſta

71. Resta a cercarsi una regola sicura per continuare all' infinito, senza pericolo d'errare, la serie, che esprime il valore d'x al num. 70. Eccone una assai comoda: Si scrivano in una serie gli R minori di x, e sopra questa, tra gli intervalli della serie già scritta, si collochino gli R maggiori di x, nel modo seguente:

per gli R maggiori di x...... R^{II} R^{IV} R^{VI} R^{VIII}...... ec.
per gli R minori di x..... R^{I} R^{III} R^{V} R^{VII} R^{IX}.... ec.

gli R della serie superiore sono i *minuendi*, gli R della serie inferiore sono i *minutori*; ciascun R della serie superiore va combinato coi due, che gli stanno a lato nella inferiore; l'R^{II} va combinato coll' R^{I} e coll' R^{III} ec., e così nel resto; ciascuna di queste combinazioni va fatta col segno — posto avanti gli R d'accenti impari, e forma un termine della serie cercata, da unirsi agli altri, o col +, o col —, secondo, che porta l'alternazione de' segni, che deve regnare dopo il primo positivo, nella serie x.

72. Sostituendo adunque nella formola del num. 70. i valori di R presi dalla frazione data al num. 66., si ha la serie

$$a+\frac{a'}{b}-\frac{a'b'}{b(bc+b')}+\frac{a'b'c'}{(bc+b')(bcd+b'd+c'd)}-\ldots \text{ ec.},$$

che corrisponde a quella frazione, e facendo nella frazione medesima $a=0$, perchè essa rappresenti le pure frazioni continue, si avrà la serie $\frac{a'}{b}-\frac{a'b'}{b(bc+b')}+\ldots$ ec., che le corrisponde; finalmente se gli a', b', c', d'.... ec., cioè i numeratori d'una data frazione continua siano quantità sempre costanti (a cagione d'esempio tante unità), ed a, coi denominatori b, c, d... ec. della frazione medesima siano numeri interi positivi, la serie che gli corrisponderà sarà con pochi termini convergentissima al valor vero; in ogni caso però si interromperà la serie semprecchè la data frazione non anderà all' infinito.

73. Pas-

73. Passiamo al problema inverso delle frazioni continue, cioè a trasformare una data serie in una frazione continua. A questo servirà di formola ecumenica la formola del num. precedente, e la frazione corrispondente del num. 66. Si proceda così.

1.° Si assumano ad arbitrio i numeratori, o i denominatori della frazione continua, che si cerca: Noi qui supporremo assunti i denominatori a, b, c, d... ec.

2.° Si paragoni termine per termine la serie data colla serie del num. precedente; si avranno tante equazioni quanti sono termini della data serie.

3.° Con queste si determinino i numeratori a', b', c'...ec. (se si fossero assunti questi, si determinerebbero i denominatori a, b, c... ec.); cioè si esprimano i loro valori per mezzo delle lettere assunte, e de' termini della serie data.

4.° Si sostituiscano questi valori nella frazione del num. 66.

74. Applichiamo il metodo a qualche esempio. Sia data la serie

$$x=A-B+C-D+E-\ldots \text{ ec.},$$

che per cominciare con un solo termine positivo sarà rappresentata dalla serie

$$x=\frac{a'}{b}-\frac{a'b'}{b(bc+b')}+\ldots \text{ ec.}$$

Sarà	Quindi
$A=\frac{a'}{b}$	$A=\frac{a'}{b}$
$B=\frac{a'b'}{b(bc+b')}$	$\frac{B}{A}=\frac{b'}{bc+b'}$
$C=\frac{a'b'c'}{(bc+b')(bcd+b'd+c'd)}$	$\frac{C}{B}=\frac{c'b}{bcd+b'd+c'b}$
$D=\ldots$ ec.	$\frac{D}{C}=\ldots$ ec.

Cioè

Cioè

$$a' = Ab$$

$$b' = \frac{Bbc}{A-B}$$

$$c' = \frac{Cd(bc+b')}{b(B-C)}$$

$$d' = \frac{De(bcd+b'd+c'b)}{(bc+b')(C-D)}$$

.... ec.

e finalmente

$$a' = Ab$$

$$b' = \frac{Bbc}{A-B}$$

$$c' = \frac{ACcd}{(A-B)(B-C)}$$

$$d' = \frac{BDde}{(B-C)(C-D)}$$

.... ec.

75. Sia data la ſerie

$$x = \frac{1}{A} - \frac{1}{B} + \frac{1}{C} - \frac{1}{D} + \dots \text{ ec.}$$

Si avrà collo ſteſſo metodo

$$a' = \frac{b}{A} \qquad c' = \frac{B^2 cd}{(B-A)(C-B)}$$

$$b' = \frac{Abc}{B-A} \qquad d' = \frac{C^2 de}{(C-B)(D-C)}$$

.... ec.

76. Sia data la ſerie

$$x = \frac{1}{A} - \frac{1}{AB} + \frac{1}{ABC} - \frac{1}{ABCD} + \dots \text{ ec.}$$

Sarà $a' = \frac{b}{A}$ $\qquad c' = \frac{Bcd}{(B-1)(C-1)}$

$$b' = \frac{bc}{B-1} \qquad d' = \frac{Cde}{(C-1)(D-1)}$$

.... ec.

77. Sia

77. Sia data la ſerie

$$x = A - Bz + Cz^2 - Dz^3 + \dots \text{ ec.}$$

Sarà $a' = Ab$ $\qquad c' = \frac{ACcdz}{(A-Bz)(B-Cz)}$

$$b' = \frac{Bbcz}{A-Bz} \qquad d' = \frac{BDdez}{(B-Cz)(C-Dz)}$$

.... ec.

78. Determinati così i valori de' numeratori, converrà prima di fare le ſoſtituzioni nella formola del num. 66. determinare ad arbitrio i valori de' denominatori a, b, c, d ... ec.; Ma perchè la forma della frazione ſia più ſpedita, ſarà bene aſſumergli tali, che eſſendo eſſi numeri interi, eſprimano in numeri interi anche i numeratori; queſto però dipende altresì dalla natura de' termini della data ſerie.

Si faccia, a cagione d'eſempio,

al num. 74. ...... $b = 1$

$$c = A - B$$

$$d = B - C$$

$$e = C - D$$

$$f = \dots \text{ ec.}$$

e, fatte le Soſtituzioni, ſi avrà

$$x = \cfrac{A}{1 + \cfrac{B}{(A-B) + \cfrac{AC}{(B-C) + \cfrac{BD}{(C-D) + \cfrac{CE}{(D-E) + \dots \text{ ec.}}}}}}$$

al

al num. 75....... $b=A$

$$c=B-A$$
$$d=C-B$$
$$e=D-C$$
$$f=\dots \text{ ec.}$$

e si avrà

$$x=\cfrac{1}{A+\cfrac{A^2}{(B-A)+\cfrac{B^2}{(C-B)+\cfrac{C^2}{(D-C)+\dots \text{ ec.}}}}}$$

così pure al num. 76., fatto $b=A$ ed al num. 77. $b=1$

$c=B-1$	$c=A-Bz$
$d=C-1$	$d=B-Cz$
$e=D-1$	$e=C-Dz$
$f=\dots$ ec.	$f=\dots$ ec.

Si determinerà come sopra la frazione x.

79. Si noti per ultimo, che si può cambiare in frazione continua qualunque frazione, o volgare essa sia, o decimale espressa a modo delle volgari. Sia A il numeratore, e B il denominatore della data frazione; ed usando il metodo del num. 86. dell'Introduzione per avere il comune divisore di due quantità,

Sia $\frac{A}{B}=a+\frac{C}{B}$

$\frac{B}{C}=b+\frac{D}{C}$ .... donde .... $\frac{C}{B}=\cfrac{1}{b+\cfrac{D}{C}}$

$\frac{C}{D}=c+\frac{E}{D}$ .... $\frac{D}{C}=\cfrac{1}{c+\cfrac{E}{D}}$

.... ec. .... ec.

quindi $\frac{A}{B}=a+\frac{C}{B}=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{D}{C}}=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{E}{D}}}=\dots$ ec.

cosicchè chiamando a, b, c, d... ec. i quoti interi, e trovati col metodo accennato, si avrà $x=\frac{A}{B}$

$$=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\cfrac{1}{f+\dots \text{ ec.}}}}}}$$

80. Per dare un esempio di questo metodo, egli è noto, che se si concepisca distesa in lungo la semiperifería d'un circolo qualunque, essa paragonata al raggio, che la ha descritta, si troverà prossimamente tripla del raggio medesimo, cioè la lunghezza del raggio sta alla lunghezza della semiperifería prossimamente come l'unità a 3. Questa ragione del raggio r preso per unità alla lunghezza della semiperifería si esprime più esattamente, come l'unità al numero

3, 14159265358979323846264338327950288419716939937510
5820974944592307816406286208998628034825342211706798
21480865132723066470938446 .... ec. $= p$.

Si tratti ora d'esprimere la ragione di p ad r con numeri così piccoli, che non se ne possa avere una più accurata, se non usando numeri molto maggiori. Ognun vede, che basta mutare in una frazione continua il dato numero decimale p, ed una delle frazioni equivalenti sarà la frazione, o la ragione cercata. In questa sorte di problemi quanto più i termini della data ragione son grandi, tanto più sarà accurata la determinazione; ma nell' esempio nostro sarebbe impraticabile il calcolo, se si volessero usare tutte le 129 figure, che danno quel prossimissimo valore di p. Determinando la frazione continua corrispondente alle trentadue prime figure, si troveranno i quoti

$$3 \cdot 7 \cdot 15 \cdot 1 \cdot 292 \quad \ldots \text{ec.}$$

e le frazioni equivalenti formeranno la serie, contata dopo l'a° del num. 68.

$$\frac{3}{1} \cdot \frac{22}{7} \cdot \frac{333}{106} \cdot \frac{355}{113} \cdot \frac{103993}{33102} \ldots \text{ec.}$$

La prima frazione mostra, che $p:r::3:1$, nè si può più accuratamente esprimere in numeri non maggiori la ragione di p ad r; la seconda frazione da $p:r:22:7$, che è la ragione *Archimedea*; e la quarta frazione da $p:r::355:113$, che è la ragione *Mezziana* maggiore della vera meno di $\frac{1}{113 \times 33102}$; tutte poi le ragioni espresse coi termini trovati sono alternativamente minori, e maggiori della vera, la prima è minore, la seconda è maggiore, la terza è minore, la quarta maggiore... ec., come abbiamo già notato sopra.

81. Si facciano le stesse riflessioni sulla frazione 0, 000290 8882086657 2... ec., e su 206264, 7887323... ec.
La prima frazione esprime la lunghezza d'un arco circolare d'un minuto primo, ed è cavata dalla seguente analogía: la semiperifería sta all' arco d'un minuto primo, come p sta al quarto; La seconda frazione esprime il numero de' secondi, che comprenderebbe il raggio d'un circolo, se esso fosse curvato in arco sulla perifería del circolo medesimo, ed è dedotta dalla seguente analogía, come p sta ad r, così la semiperifería espressa in secondi ec. (cioè 648000 secondi) sta al quarto termine. Colla prima frazione si ha facilmente la lunghezza d'un arco qualunque; basta multiplicare per quella il numero de' primi minuti; de' quali è composto l'arco dato. Colla seconda frazione si ha facilmente l'arco, che corrisponde a qualunque (per parlare cogli Astronomi) funzione circolare, espressa in parti del raggio; basta multiplicare per quella frazione la funzione data.
Si noti 1.° Che per avere la seconda frazione s'è usata la ragione Mezziana della semiperifería al raggio.
2.° Che riducendo la seconda frazione a' gradi, si vede, che il raggio è eguale a 57 gradi, 17 minuti, e 44, 8 secondi prossimamente. Queste cose siano qui dette di passaggio, e per esercizio di calcolo sulle frazioni continue.

CAPO TERZO.

Della Sommazione delle ferie, e del loro termine generale.

Claſſi diverſe, ed eſpreſſioni generali delle ſerie.

82. NE' due precedenti capi s'è data una ſufficiente idea delle ſerie, che naſcono dalla Evoluzione delle quantità algebraiche; non ci reſta altro a fare per una compiuta trattazione delle ſerie, che moſtrare il metodo per trovare, data una ſerie, il ſuo termine generale, e dato, o trovato il termine generale, trovare la generale ſomma della medeſima. E' però da ſaperſi avanti ogn'altra coſa; 1.° Che dagli Annaliſti ſi chiama *funzione* d'una quantità, qualunque algebraica eſpreſſione comunque compoſta da quella, e da altre quantità, o date, o preſe ad arbitrio; così $a + 3z$, $a + 4z$, $az \pm b\sqrt{a^2 - z^2}$ ſono funzioni di z.

2.° Che per *termine generale* d'una ſerie intendiamo qui una funzione di m tale, che ſe invece di m vi ſi ſoſtituiſcano ſucceſſivamente i termini $1 . 2 . 3 \ldots\ldots m$ della ſerie naturale, ſi avrà ſucceſſivamente il primo, il ſecondo, il terzo, l'$m^{eſimo}$ termine della ſerie data.

3.° Che *ſomma generale* d'una ſerie, ſignifica parimenti una funzione di m tale, che ſe invece di m vi ſi ſoſtituiſcano ſucceſſivamente i termini $2 . 3 \ldots\ldots m$ della ſerie naturale, ſi avrà ſucceſſivamente la ſomma de' primi due, de' primi tre, de' termini m della ſerie data.

83. Ciò ſuppoſto: Conviene diſtinguere le ſerie ſommabili dalle non ſommabili; dacchè d'infinite ſerie non ſi può trovare la ſomma eſatta, ma ſolo per approſſimazione; queſte richiedono un trattato a parte, e ſi conoſcerà quali eſſe ſieno dal non poterſi col metodo, che eſporrò, trovare la loro ſomma vera. Quanto alle ſerie ſommabili, a tre claſſi, o generi ſi riducono quelle, che più comunemente ſono uſate ne' calcoli.

Il primo genere comprende tutte le ſerie, chiamate *aritmetiche* per l'analogía, che eſſe hanno nella loro formazione, colle progreſſioni aritmetiche; il ſecondo genere comprende tutte le ſerie, chiamate *geometriche* per l'analogía, che eſſe hanno nella loro formazione, colle geometriche progreſſioni; il terzo comprende tutte quelle, che naſcono dalla compoſizione delle ſerie, che appartengono agli altri due.

84. Se una data ſerie ſia tale, che, ſcritti i ſuoi termini, cominciando dal minimo, uno ſotto l'altro in una colonna verticale A, le differenze de' ſuoi termini, ſcritte in una colonna B accanto alla prima, ſiano coſtanti, quella ſerie, come è noto, ſi chiama progreſſione aritmetica. Quindi hanno tratto il nome di ſerie aritmetiche quelle ſerie, in cui non le differenze di A ſcritte in B, ma le differenze di B ſcritte in C, o quelle di C ſcritte in D, o... ec. ſieno coſtanti; e chiamando ſerie aritmetiche di primo ordine le ſemplici progreſſioni aritmetiche, ſi ſono chiamate ſerie aritmetiche di ſecondo, di terzo, di quarto.... ordine le altre ſerie, ſecondochè eſſe avranno le differenze coſtanti in C, in D, in E.... ec. Le differenze ſcritte in B ſi chiamano differenze *prime*, e quelle ſcritte in C, in D, in E... ec. ſi chiamano differenze *ſeconde*, *terze*.... ec. della ſerie A. Onde le ſerie, che hanno le differenze $n^{eſime}$ coſtanti, ſono ſerie aritmetiche di ordine $n^{eſimo}$.

85. E' evidente, che la ſerie $1 . 2 . 3 \ldots\ldots m$ è una ſerie aritmetica di primo ordine; che le potenze ſeconde di m formano una ſerie aritmetica di ſecondo ordine, le terze di m formano una ſerie aritmetica di terzo ordine; ed in generale, che le

le potenze n di m formano una ferie aritmetica di ordine n. O più generalmente ancora Bm rapprefenta un termine qualunque delle ferie aritmetiche di primo ordine, Cm^2 rapprefenta le ferie aritmetiche di fecondo ordine, Dm^3 quelle di terzo, e Tm^n quelle d'ordine n; e per maggiore generalità ancora, fi potrà aggiungere a ciafcuna di quefte ferie un termine della ferie coftante A.

86. Quindi $A+Bm+Cm^2+Dm^3 \ldots\ldots Tm^n$ rapprefenta fucceffivamente tutte le ferie aritmetiche fino all' ordine n; cioè i primi due termini $A+Bm$ rapprefenta le ferie aritmetiche di primo ordine; i primi tre quelle di fecondo ordine; e così nel refto.

87. Le ferie geometriche fono ferie di numeri formate dall' addizione de' termini analogi di più progreffioni geometriche; e chiamando ferie geometriche del primo ordine le femplici progreffioni geometriche, le ferie formate dall' addizione de' termini analogi di due, di tre, di quattro, di n progreffioni geometriche, faranno ferie geometriche di fecondo, di terzo, di n ordine.

88. Se H, I, $K \ldots$ ec. rapprefentino ciafcuno un dato diverfo numero, è noto, che ciafcuno de' H^m, I^m, $K^m \ldots$ ec. rapprefenterà una progreffione geometrica d'efponente m, formata da' rifpettivi loro numeri prefi per bafe della progreffione; e più generalmente rapprefenteranno qualunque progreffione geometrica, fe ciafcuna di quefte formole fi multiplicheranno per una indeterminata; cioè AH^m, BI^m, $CK^m \ldots$ ec. faranno le efpreffioni di diverfe progreffioni geometriche, cioè rapprefenteranno indeterminatamente qualunque termine m di diverfe progreffioni geometriche.

89. Quindi $AH^m+BI^m+CK^m+\ldots$ ec. rapprefenta fucceffivamente con termini n le ferie geometriche d'ordine n; cioè il primo termine AH^m rapprefenta le ferie geometriche di primo ordine, i primi due termini AH^m+BI^m rapprefenta le ferie geometriche del fecondo ordine, e così nel refto.

90. E' manifefto, che $(A+Bm+Cm^2 \ldots\ldots Tm^n)\,H^m$ comprende un' infinità di ferie del terzo genere, cioè compofte di ferie aritmetiche all' infinito diverfe, e di qualunque ferie geometrica; quefte ferie fi chiamano *aritmetico-geometriche*, e l'efponente del loro ordine, è la fomma degli efponenti dell' ordine delle due ferie. E' facile quindi a formarfi idea delle altre ferie di terzo genere, infinitamente diverfe all' infinito.

91. Il celebre Moivre chiama ferie *ricorrenti* tutte le ferie, i termini delle quali fono formati da' termini precedenti multiplicati rifpettivamente da quantità coftanti. Di quefta natura fono le ferie, di cui abbiamo dato fin qui gl' indeterminati termini generali; ci farà affai utile nel decorfo la dimoftrazione di quefto teorema.

92. Dico adunque in primo luogo, che le ferie aritmetiche fono ferie ricorrenti. Se $A+B+C+D \ldots + T$ fia una ferie aritmetica di primo ordine, che ha $A+Bm$ per termine generale, farà

$$\begin{aligned} C &= 2B-A \\ D &= 2C-B \\ E &= 2D-C \\ F &= 2E-D \\ &\ldots \text{ ec.} \end{aligned}$$

Se fia una ferie aritmetica di fecondo ordine, che ha termine generale $A+Bm+Cm^2$, farà

$$\begin{aligned} D &= 3C-3B+A \\ E &= 3D-3C+B \\ F &= 3E-3D+C \\ E &= 3F-3E+D \\ &\ldots \text{ ec.} \end{aligned}$$

Se

Se ſia una ſerie aritmetica di terzo ordine, che ha per termine generale $A + Bm + Cm^2 + Dm^3$, ſarà

$$E = 4D - 6C + 4B - A$$
$$F = 4E - 6D + 4C - B$$
$$G = 4F - 6E + 4D - C$$
$$H = 4G - 6F + 4E - D$$
$$\ldots\ \text{ec.}$$

Ed in generale, le ſerie aritmetiche di ordine n ſono ſerie ricorrenti di ordine $n+1$. Per avere generalmente il termine T, per qualunque ordine n di ſerie aritmetiche, ſi ſcelgano i coefficienti $s, r, q, p \ldots$ ec. per la potenza $n+1$ del binomio $a+b$, ommeſſo il primo degli eſtremi, e ſi prendano termini $n+1$ nella formola

$$T = sS - rR + qQ - pP + \ldots\ \text{ec.}$$

93. Dico in ſecondo luogo, che le ſerie geometriche ſono ſerie ricorrenti. Se $A + B + C + D \ldots\ldots + T$, ſia una ſerie geometrica di primo ordine, che ha per termine generale AH^m,

fatto $H = s$, ſarà $T = sS$.

Se ſia una ſerie geometrica di ſecondo ordine, che ha per termine generale $AH^m + BI^m$,

$$\text{fatto } H + I = s$$
$$HI = r$$
$$\text{ſarà } T = sS - rR$$

Se ſia una ſerie geometrica di terz' ordine, che ha per termine generale $AH^m + BI^m + CK^m$,

$$\text{fatto } H + I + K = s$$
$$+ HI + HK + IK = r$$
$$+ HIK = q$$

ſarà, alternando i ſegni, $T = sS - rR + qQ$

Ed in generale le ſerie geometriche d'ordine n, ſono ſerie ricorrenti del medeſimo ordine. Per avere generalmente il T per qualunque ordine n di ſerie geometriche, ſi chiami s la ſomma di tutti i $H, I, K, L, M, N \ldots$ ec.; ſi chiami r la ſomma di tutti

tutti i binarj de' medeſimi; q la ſomma di tutti i ternarj....., e così nel reſto, ſarà, alternando i ſegni,

$$T = sS - rR + qQ - pP + \ldots\ \text{ec.}$$

94. Dico finalmente, che le ſerie Algebraico-geometriche ſono ſerie ricorrenti.

Se $A + B + C + D \ldots\ldots + T$ ſia una ſerie Algebraico-geometrica di ordine n, ſi avrà per il T la ſteſſiſſima formola del num. 92., con queſto ſolo divario, che il termine $m^{eſimo}$ della medeſima è multiplicato per H^m.

95. Non m'è ignoto, che ſi può determinare il termine T d'una ſerie ricorrente d'ordine n con ſoli $n-1$ termini precedenti. Vedi Eulero num. 227..... 230. Tom. I. della più volte citata Introduzione; ma ciò non è contrario alla generale deffinizione, che l'ordine delle ſerie ricorrenti ſia il numero de' termini precedenti, che determinano il ſeguente; al più ſi potrà dire, che la ſteſſa ſerie può conſiderarſi come ricorrente d'ordine n, e d'ordine $n-1$.

96. Tutte quaſi le ſerie, che abbiamo dedotte ne' due precedenti capi ſono ſerie ricorrenti di qualche ordine. Noi abbiamo ivi aſſegnata la legge di dipendenza d'un termine qualunque dagli altri; Si noti, che alcune di quelle ſerie con qualche traſformazione ſi riducono a ſerie ricorrenti aritmetiche. A cagione d'eſempio, nel capo ſecondo (num. 42.) per le frazioni, che hanno al denominatore una quantità della forma $(1 - ix)^{m+1}$, fatto $i = 1$, ed $x = 1$, ſi avrà una ſerie della forma ſeguente

Se $m = 1$, ſi avrà

$$b + (b + a) + (b + 2a) + (b + 3a) + \ldots\ \text{ec.}$$

Se $m = 2$, ſi avrà

$$c + (c + b) + (c + 2b + a) + (c + 3b + 3a) + \ldots\ \text{ec.}$$

Se $m = 3$, ſi avrà

$$d + (d + c) + (d + 2c + b) + (d + 3c + 3b + a) + \ldots\ \text{ec.}$$

Se $m = 4$, ſi avrà

$$\ldots\ldots\ \text{ec.}$$

La

La prima di queſte ſerie rappreſenta generalmente tutte le ſerie aritmetiche di primo ordine; la ſeconda rappreſenta quelle di ſecondo ordine.... la n^{esima} rappreſenta quelle di ordine n.

97. Si noti di paſſaggio, che nelle ſerie precedenti, a indica l'ultima differenza, che è coſtante; b indica la prima delle penultime; c la prima delle antipenultime... ec., come ſi fa manifeſto dal prendere coll' ordine detto al num. 84. le differenze de' loro termini: A cagione d'eſempio per la ſeconda ſerie, ſi avrà

A	B	C
c		
....	b	
$c+b$	....	a
....	$b+a$	
$c+2b+a$	....	a
....	$b+2a$	
$c+3b+3a$		
... ec.	... ec.	

Trovare la ſomma, ed il termine generale delle ſerie, ſecondo il metodo del P. Riccati.

98. NEl cercare la ſomma, ed il termine generale delle ſerie, mi ſono appigliato al metodo, che il P. Riccati ha così elegantemente eſpoſto nel ſuo tanto inſigne Commentario *de ſeriebus recipientibus ſummam Algebraicam, aut exponentialem*. Ho trovato vero in pratica, ciocchè egli accenna nella ſua prefazione, cioè, che il ſuo metodo determina tutte le ſerie propoſte da' più celebri Autori, che hanno trattata queſta materia, ed all' incontro ſi determinano col metodo medeſimo molte altre ſerie, delle quali non ſi ſaprebbe trovare la ſomma coi metodi altrui. Vedi Eulero, Mayer, Stirling, ec. Stabilito, che avrò l'univerſale principio del P. Riccati, diſcenderò ad applicare il ſuo metodo alle ſerie aritmetiche, quindi alle geometriche, e finalmente alle ſerie compoſte di amendue.

99. Il principale artificio del P. Riccati è di aſſumere varie formole, che indeterminatamente rappreſentino le ſomme generali delle ſerie, e dalla loro contemplazione dedurne le condizioni, che devono avere i loro termini generali, perchè da eſſi ſi poſſa rimontare alle ſomme cercate. Mette egli per baſe di tutte le ſublimi ſue inquiſizioni il ſeguente ſempliciſſimo teorema: In qualunque ſerie il termine generale è eguale alla ſomma di tutti i termini fino ad m *incluſive*, meno la ſomma di tutti i termini, incluſivamente fino al termine $m-1$; cioè chiamando T il termine $m^{eſimo}$, S la ſomma de' termini m, ed s la ſomma de' termini $m-1$, ſi ha $T=S-s$.

100. Si noti: 1.° Che quantunque ſia $T=S-s$, ſe ſi trovi $T=A-a$, non ſi dovrà perciò conchiudere, che A ſia la vera ſomma, o che ſia $A=S$, comunque A, ed a ſiano funzioni di m; così ſi ha $\frac{6m-5}{2}=\frac{3m^2-1}{2}-\frac{3(m-1)^2-1}{2}$, eppure $\frac{3m^2-1}{2}$ non è la ſomma della ſerie, che ha $\frac{6m-5}{2}$ per termine generale.

2.° Si può facilmente conoſcere, ſe A è la vera ſomma, anzi facilmente ſi può ridurre A ad eſſere la vera ſomma, quando nol ſia. Si faccia $m=1$ tanto in T, quanto in A, coſicchè s'abbia T', ed A'; Se $T'-A'=0$, ſarà $A=S$. Se $T'-A'=b$, ſarà $A+b=S$; nel precedente eſempio ſi ha $T'=\frac{2}{2}$, ed $A'=1$; donde $S=\frac{3m^2-1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3m^2}{2}$.

3.° Fin-

3.° Finchè il T ha la forma di $S-s$, la formola non può servire all'uso, dacchè venendo s dalla sostituzione di $m-1$ invece di m in S, la serie formata da T sarà composta di due, ed il termine m^{esimo} della prima eliderà il termine $(m+1)^{esimo}$ della seconda; onde non rimarrà, che l'ultimo termine della prima serie meno il primo termine della seconda; ciocchè ciascuno potrà vedere formando la serie, che ha per somma $\frac{m}{2+m}$, fatto

$$T=S-s=\frac{m}{2+m}-\frac{m-1}{1+m}.$$

101. Posti questi principj prendiamo col P. Riccati ad esaminare la seguente formola $S=Am+Bm^2+Cm^3$ ..... ec.

1.° Se $S=Am$, mettendo $m-1$ invece d'm in S, si ha $s=Am-A$, e pel teorema $T=S-s=A$; ognun vede, che non entrando l'm in questo termine generale, egli rappresenterà una serie di quantità costanti A, A, A .... ec., la somma della quale è lo stesso Am.

2.° Se $S=Am+Bm^2$, mettendo $m-1$ invece di m in S, si avrà

$$\begin{array}{l} s=-A+Am \\ \quad +B-2Bm+Bm^2; \end{array}$$

e, pel teorema, sarà $T=\begin{array}{l} A \\ -B+2Bm \end{array}$

Formando la serie corrispondente a questo T colla sostituzione di 1; 2; 3... ec. invece di m, si ha $A+B$; $A+3B$; $A+5B$; ... ec., che è una progressione aritmetica di differenza costante $2B$, o una serie aritmetica di primo ordine; dunque $\begin{array}{l} A \\ -B+2Bm \end{array}$ è la forma, che deve avere il termine generale di questa serie, perchè la loro somma sia rappresentata da S; cioè deve contenere una parte costante $A-B$, ed un'altra $2Bm$ multiplicata per m lineare; allora $Am+Bm^2$ rappresenterà la

loro

loro somma; e di più, se un dato termine generale abbia la forma del nostro, paragonando la parte costante con $A-B$, e la parte multiplicata per m con $2Bm$, si determineranno gli A, B da sostituirsi in S per avere la somma vera. Anzi data una serie aritmetica di primo ordine, supponendo eguale il primo suo termine ad $\begin{array}{l} +A \\ -B+2B \end{array}$, (posto $m=1$), ed il secondo della serie al medesimo $\begin{array}{l} +A \\ -B+2Bm \end{array}$, (fatto $m=2$), si avranno tante equazioni quante indeterminate, ed i loro valori sostituiti in S, T, daranno la somma vera, ed il vero termine generale della data serie.

3.° Se $S=Am+Bm^2+Cm^3$; allo stesso modo colla sostituzione di $m-1$ invece di m in S, si avrà

$$T=\begin{array}{l} A \\ -B+2Bm \\ +C-3Cm+3Cm^2 \end{array}$$; e determinando

la serie di questo T, si avrà $A+B+C$; $A+3B+7C$; $A+5B+19C$;... ec., che è una serie aritmetica di second'ordine, che ha la seconda differenza costante $6C$; dunque la forma del nuovo T è la forma, che deve avere il termine generale di queste serie, perchè il primo S rappresenti la loro somma; e di più, se un dato termine generale avrà la predetta forma, cioè una parte $A-B+C$ costante, una parte distinta da m, come $2Bm-3Cm$, ed una terza parte $3Cm^2$ distinta da m^2; colle equazioni formate dal paragone rispettivo di queste tre parti, si determineranno gli A, B, C da sostituirsi in S per avere la somma, che corrisponde al dato T. Anzi data una serie aritmetica di second'ordine, paragonando il primo termine della data serie con questo T (in cui si faccia $m=1$), il secondo della serie col T (supposto $m=2$), il terzo della serie col medesimo T (posto $m=3$), si avranno tante equazioni, quante

ne

ne abbisognano per determinare gli A, B, C da sostituirsi in T, ed S per avere la somma, ed il termine generale della serie proposta.

4.° Collo stesso discorso, considerando quattro, cinque .... termini di quel primo S della formola, si determineranno le condizioni, che devono avere i termini generali, perchè da questi S siano rappresentate le somme delle loro serie, e si dedurrà il metodo per avere la somma, ed il termine generale delle serie di differenze terze, quarte .... costanti.

102. Quindi si può dire generalmente, che le serie ricorrenti aritmetiche d'ordine n hanno per termine generale una funzione di m, in cui m è alzata alla potenza n; e che le serie, il cui termine generale è una funzione di m, nella quale m è alzata alla potenza n, ha per somma generale una funzione di m, che ha per esponente massimo $n+1$. Da queste due considerazioni si ha un metodo universale, e facile per la pratica.

1.° Data una serie, in cui la differenza n^{esima} è costante, trovare il termine generale della medesima. Si prenda indeterminatamente $T = A + Bm + Cm^2 + Dm^3 \ldots\ldots + Lm^n$; fatto m successivamente eguale ad 1; 2; 3;... ec., si paragoni successivamente l'indeterminato T col primo, secondo, terzo..... termine della data serie, fino ad avere tante equazioni, quante sono le indeterminate in T; si sostituiscano i valori di A, B, C .... dedotti da queste equazioni, in T.

2.° Dato (o trovato) il termine generale d'una serie di differenza n^{esima} costante, trovare la somma generale della medesima. Si prenda indeterminatamente $S = Am + Bm^2 + Cm^3 \ldots\ldots + Lm^{n+1}$; si determini colla sostituzione di $m-1$ invece di m un nuovo valore $T = S - s$; col paragone delle parti di questo T colle parti rispettive del dato termine, si avranno tante equazioni, quante sono le indeterminate in T, ed i loro valori sostituiti in S, daranno la somma generale della serie, di cui si suppone dato il termine generale.

103. Quanto alle serie ricorrenti geometriche, si consideri la formola $S = AH^m - A$; sostituito $m-1$ invece di m, si ha

$$s = AH^{m-1} - A$$

$$\text{donde } T = S - s = (AH^m - A) - (AH^{m-1} - A)$$

$$= \frac{A.\overline{H-1}}{H} H^m.$$

Se H fosse minore dell' unità, si dovrebbe al solito, mutare il segno d'uno de' fattori. Ognun vede, che questo termine generale ci dà una serie geometrica di primo ordine, e che perciò quando il termine generale dato sia composto d'un fattore della forma H^m, e di un altro della forma $\frac{A.\overline{H-1}}{H}$, esso appartiene ad una serie geometrica di primo ordine. Paragonando i dati fattori componenti coi nostri indeterminati, si avrà il valore di A, H da sostituirsi in S: Così pure, se data la serie geometrica, si cerchi il termine generale, paragonando l'indeterminato T coi primi due termini della data serie, si avrà il valore di A, H, da sostituirsi in T.

104. Per le serie geometriche di grado più elevato del primo, si è già notato, che esse sono un aggregato di serie geometriche di primo ordine; Onde 1.° Date le serie componenti, la somma de' loro termini generali sarà il termine generale della composta.

2.° Dato il termine generale della composta, la somma delle somme generali delle sue parti (che sono i termini generali delle serie componenti) sarà la somma generale della medesima.

105. Si dica lo stesso per le serie ricorrenti aritmetico-geometriche, adoperando la somma, o la multiplicazione delle parti

ti de' termini, e delle somme generali, secondocchè esse sono formate colla somma, o colla multiplicazione di più serie componenti.

106. Resta a darsi un metodo per trovare il termine generale per le serie ricorrenti geometriche, ed aritmetico-geometriche data la legge della serie. 1.° Si dà la legge delle serie ricorrenti geometriche, quando si danno i multiplicatori de' termini precedenti al T cercato, ed, essendo questi multiplicatori la somma s, i prodotti a due, a due r, i prodotti a tre, a tre q... ec. degli H, I, K, L... ec., che entrano a formare il termine generale $T = AH^m + BI^m + DK^m + \ldots$ ec., si riduce la quistione, a sapere separare da quei prodotti s, r, q... ec. le quantità H, I, K, L... ec. da sostituirsi in T. Questo però è il notissimo problema dell' Analisi Cartesiana sciolto da noi in tutta la sua generalità nell' introduzione, e nel capo primo di questo secondo libro. Si chiami x il valore di ciascuna di quelle lettere, m in numero; se la somma di questi x è s, e quella de' loro binarj, ternarj .... sia r, q, p... ec., sarà per il num. 101.

$$x^m - s x^{m-1} + r x^{m-2} - q x^{m-3} + p x^{m-4} - \ldots \text{ ec.} = 0,$$

e le radici di questa equazione saranno i valori cercati.
2.° Per le serie aritmetico-geometriche, si chiamino allo stesso modo s', r', q', p'... ec. i coefficienti di S, R, Q, P avuti nella formola formata al num. 102., ed i valori di

$$x^m - s' x^{m-1} + r' x^{m-2} - q' x^{m-3} + \ldots \text{ ec.} = 0$$

saranno i valori di

$$H, I, K, L, M, N, \ldots \text{ ec.}$$

da sostituirsi in T.
3.° I valori di A, B, C ...... Q, R, S si determineranno in amendue i generi di serie ricorrenti qui spiegate, col noto paragone dell' indeterminato T con i primi n termini dati, o assunti

sunti della serie di cui vien data la legge. Si noti, che per le serie algebraico geometriche, sarà $S = (A + Bm + Cm^2 + Dm^3 + Dm^4 \ldots \text{ ec.}) H^m - A$; e che se sia $H = 1$, l'S sarà la somma semplici serie aritmetiche.

107. Una sola è la difficoltà, che s'incontra nell' uso delle precedenti equazioni. Siano dati i primi due termini 1.1 d'una serie ricorrente del secondo ordine, e tale, che per avere un altro qualunque termine, sia necessario sommare il primo termine precedente multiplicato per 3 col secondo precedente multiplicato per $-\frac{9}{4}$; quale sarà la forma del suo termine generale? Avrà egli la forma d'una serie geometrica, o d'una serie aritmetico geometrica? In questo, ed in somiglianti casi, si sciolga l'equazione $x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 0$, si avrà $x = \frac{3}{2}$, $x = \frac{3}{2}$; cioè si avranno due radici eguali; questo è segno, che il cercato termine generale non può avere la forma $AH^m + BI^m$, ma solamente la forma $(A + Bm) H^m$, cioè sarà $T = (A + Bm) \left(\frac{3}{2}\right)^m$. Se si sostituisce $\frac{3}{2}$ invece di H, I in $AH^m + BI^m$, si avrebbe $\left(\frac{3}{2}\right)^m A + \left(\frac{3}{2}\right)^m B$, donde $1 = \frac{2}{3}$, che è un assurdo.

108. Basti il detto fin qui sulle serie ricorrenti, cioè sulle serie aritmetiche, sulle serie geometriche, e sulle serie composte da queste due. Per le serie, che non sono ricorrenti, io ne produrrò d'una sola specie, che ne abbraccia infinite subalterne. Chi desiderasse una più precisa notizia su altre serie più intralciate, legga il citato Commentario. Contempliamo intanto la formola

$$S = \frac{Lm + Mm^2 + Nm^3 \ldots\ldots + Rm^{p-1} + Sm^p}{(A + Bm)(A + B\,\overline{m-1}) \ldots\ldots (A + B.\,\overline{m-p+2})(A + B.\,\overline{m-p+1})}$$

So-

Sostituendo $m-1$ invece di m, si avrà

$$s=\frac{L\,\overline{m-1}+M.\overline{m-1}^2+N.\overline{m-1}^3\ldots+R.\overline{m-1}^{p-1}+S\,\overline{m-1}^p}{(A+B.\overline{m-1})(A+B.m-2)\ldots(A+B.\overline{m-p+1})(A+B.\overline{m-p})}$$

Per sottrarre l's dall'S, si multiplichino i termini della frazione S per $A+B.\overline{m-p}$, ed i termini della frazione s per $A+Bm$; fatta la riduzione, non si avrà più il T sotto la forma di $S-s$, ma chiamando $\mathcal{Q}$, $\mathcal{Q}'$ nel secondo membro delle seguenti equazioni tutto il secondo fattore del primo membro, sarà il numeratore di T.

$$(A+B.\overline{m-p})\left\{\begin{matrix}L\,m+M\,m^2 & +N\,m^3\ldots\\ \ldots.+R\,m^{p-1} & +S\,m^p\end{matrix}\right\}=(A+B\,m-B\,p)\,\mathcal{Q}$$

$$-(A+Bm)\left\{\begin{matrix}L.\overline{m-1}+M.\overline{m-1}^2 & +N.\overline{m-1}^3\\ \ldots\ldots..+R.\overline{m-1}^{p-1} & +S.\overline{m-1}^p\end{matrix}\right\}=(A+Bm).(-\mathcal{Q}')$$

ed il denominatore

$$D=(A+B\,m)(A+B.\overline{m-1})\ldots(A+B.\overline{m-p+1})(A+B.m-p)$$

E' manifesta la legge, con cui va decrescendo il denominatore di T. Per conoscere la legge, che regna nel numeratore, è evidente, che egli è eguale a

$$(A+B\,m)(\mathcal{Q}-\mathcal{Q}')-B\,p\,\mathcal{Q}$$

cioè eguale ad $A(\mathcal{Q}-\mathcal{Q}')+B\,m(\mathcal{Q}-\mathcal{Q}')-B\,p\,\mathcal{Q}$; ed essendo

$$\left\{\begin{array}{ll}L.(m-\overline{m-1}) & =-L\\ M.(m^2-\overline{m-1}^2) & =-M+2\,M\,m\\ N.(m^3-\overline{m-1}^3) & =+N-3\,N\,m+3\,N\,m^2\\ \vdots & \\ R.(m^{p-1}-\overline{m-1}^{p-1}) & =\pm R\mp\frac{\overline{p-1}}{1}R\,m\pm\frac{\overline{p-1}.\overline{p-2}}{1\,.\,2}R\,m^2\ldots\\ S.(m^p-\overline{m-1}^p) & =\mp S\pm\frac{p}{1}S\,m\mp\frac{p.\overline{p-1}}{1\,.\,2}S\,m^2\ldots-p\,S\,m^{p-1}\end{array}\right.$$

eguale

eguale a $\mathcal{Q}-\mathcal{Q}'$, sostituendo questo valore di $\mathcal{Q}-\mathcal{Q}'$ nel numeratore $(A+B\,m)(\mathcal{Q}-\mathcal{Q}')-B\,p\,\mathcal{Q}$ si vedrà anche in questo la costante legge de' suoi termini.

109. 1.° Ciascun fattore del denominatore di T è il termine generale d'una serie aritmetica di primo ordine. La serie aritmetica del secondo fattore $A+B.\overline{m-1}$ non è diversa dalla serie del primo fattore $A+B\,m$, se non in questo, che il primo termine della serie del secondo fattore, è il secondo termine della serie del primo fattore; e così la serie del terzo fattore, comincia dal secondo termine della serie del secondo fattore, la serie del quarto fattore comincia dal terzo del terzo fattore... ec.

2.° Il denominatore di T è lo stesso, che il denominatore di S.

3.° Fatto il numero de' fattori del denominatore eguale a $p+1$, l'esponente massimo di m nel numeratore di T è $p-1$, cioè minore di due unità del numero de' fattori.

4.° Dato qualunque termine generale, che abbia le tre precedenti proprietà, si troverà il numeratore della somma generale paragonando colla formola il dato numeratore; e conseguentemente se il termine generale d'una serie abbia le condizioni del nostro, si troverà sempre la somma generale della serie medesima.

110. Perchè sia più spedita la determinazione della somma generale delle serie, i cui termini generali hanno la forma del numero precedente; 1.° Fatto il numero de' fattori del denominatore D eguale ad r, si supponga

$$S=\frac{L\,m+M\,m^2+N\,m^3\ldots..+S\,m^r}{D};$$

2.° Determinato s colla sostituzione di $m-1$ invece d'm in S, si riducano gli S, s allo stesso denominatore, cosicchè si abbia S', s'; sarà $T=S'-s'$.

3.° Pa-

3.° Paragonando i termini di T con quegli del dato termine generale ſi avranno i valori di L, M, N... ec.

111. L'uſo del calcolo farà ſvanire certe difficoltà, che forſe fa naſcere la ſemplice enunciazione del metodo. Se nel denominatore D non ſi ſuccedano i fattori, come in T del num. 108., ma manchino alcuni fattori intermedj, ſi multiplichi il numeratore, ed il denominatore del dato termine generale per i fattori, che mancano. Se...... ec.

Oſſervazioni ſul metodo del P. Riccati.

112. IL metodo del P. Riccati, tuttocchè elegante, ſemplice, ed univerſale, ſembra a primo aſpetto alquanto proliſſo, e tedioſo nella ſua applicazione. Quaſi ſempre, è vero, ſi hanno a ſciogliere equazioni ſolamente di primo grado; ma per ogni nuova ſerie pare ſia uopo ripetere le ſteſſe operazioni, di ſottrazioni d'un' equazione dall' altra, di multiplicazioni......, con facile pericolo di errare ne' calcoli, e nelle frequenti ſoſtituzioni. Non è però così in fatti a chi vi ſi metta di propoſito, e ſi renda per qualche tempo famigliari gli artificj, che per entro vi ſparge il ſuo autore; anzi nel rimirare partitamente le formole, che ſi deducono da quel metodo ne' caſi particolari, ſi accorgerà chiccheſſia, che ſi poſſono eſſe generalizzare aſſai, e farle ſervire per infiniti altri caſi ſimili. Il P. Riccati non ha voluto dedurre queſti compendj, che ben vedeva contenerſi nel ſuo metodo, o per non dilungarſi troppo dal ſuo fine, o per laſciare a chi leggeſſe il Commentario con attenzione, il piacere di dedurſegli da ſe. Io eſporrò le oſſervazioni, che ho fatte ſul metodo del P. Riccati, per renderlo più ſemplice, e più facile ad applicarſi alle ſerie di qualunque genere, ed inſieme ſcioglierò qualche intereſſante problema ſulle ſerie medeſime. Incominciamo dalle ſerie aritmetiche.

113. Le

113. Le progreſſioni aritmetiche, che ſono le ſerie aritmetiche di primo ordine, hanno, come detto è al num. 87. la forma b; $b+a$; $b+2a$; $b+3a$.... ec.; e le ſerie aritmetiche di ſecondo ordine, hanno la forma c; $c+b$; $c+2b+a$; $c+3b+3a$.... ec. Col metodo del P. Riccati ſi ha per termine generale, e per ſomma generale di queſte due ſerie

$$\text{Per la prima......}\quad T = \begin{array}{l} b \\ -a+am \end{array}$$

$$S = \begin{array}{l} bm \\ -\frac{1}{2}am+\frac{1}{2}am^2 \end{array}$$

$$\text{Per la ſeconda....}\quad T = \begin{array}{l} c \\ -b+bm \\ +a-\frac{3}{2}am+\frac{1}{2}am^2 \end{array}$$

$$S = \begin{array}{l} cm \\ -\frac{1}{2}bm+\frac{1}{2}bm^2 \\ +\frac{1}{3}am-\frac{1}{2}am^2+\frac{1}{6}am^3 \end{array}$$

114. Cerco ſe queſti due T, ed S ſeguitino qualche legge coſtante nella loro formazione, ed oſſervo, che nel primo T la parte $-a+am$ è eguale ad $\overline{m-1}\,.\,a$; onde per le ſerie aritmetiche di primo ordine ſi ha $T = b + \frac{m-1}{1}\,.\,a$, come al num. 81. del libro primo.

La ſeconda formola di T è compoſta d'una parte, che ha la ſteſſa forma della precedente, cioè $c-b+bm$, e di un' altra,

in

in cui non c'entrano, che gli m, e gli a; perciò ſi avrà la prima parte ridotta a $c + \frac{m-1}{1} b$, e la ſeconda $\frac{1}{2} a m^2 - \frac{3}{2} a m + a = \frac{1}{2} a m^2 - \frac{3}{2} a m + \frac{2}{2} a$; non conſiderando per ora il comune denominatore 2 di queſta ſeconda parte, ſi ha $am^2 - 3am + 2a = (m^2 - 3m + 2) a = (\overline{m-1} . \overline{m-2}) a$; e la ſeconda parte della formola di T, ſarà $\frac{\overline{m-1} . \overline{m-2}}{1 . 2} a$; cioè per le ſerie aritmetiche di ſecond' ordine, ſarà

$$T = c + \frac{m-1}{1} b + \frac{\overline{m-1} . \overline{m-2}}{1 . 2} a .$$

115. Si ſono adunque ridotti que' due T trovati col metodo del P. Riccati ad avere per coefficienti de' termini i coefficienti numerici della formola delle potenze d'un binomio; innoltre in amendue i T così diſpoſti l'a ſta ſempre al primo termine verſo deſtra, e verſo la ſiniſtra ſuccedono negli altri termini il b, ed il c; finalmente il numero de' termini in ciaſcun T è eguale ad $n + 1$. Se queſte oſſervazioni ſono generalmente vere per tutti i T delle altre ſerie aritmetiche, per le ſerie aritmetiche di terzo ordine, ſi avrà

$$T = d + \frac{m-1}{1} c + \frac{\overline{m-1} . \overline{m-2}}{1 . 2} b + \frac{\overline{m-1} . \overline{m-2} . \overline{m-3}}{1 . 2 . 3} a .$$

E di fatti tanto coll' applicare il metodo del P. Riccati all' eſpreſſione generale di queſte ſerie d; $d + dc$; $d + 2c + b$; $d + 3c + 3b + a$; ... ec., quanto facendo le multiplicazioni indicate nel propoſto valore di T; ſi ha ſempre

$$\frac{d - c + cm}{1} + \frac{bm^2 - 3bm + 2b}{2} + \frac{am^3 - 6am^2 + 11am - 6a}{6}$$

Lo

Lo ſteſſo avverrebbe in tutte le altre eſpreſſioni generali delle ſerie aritmetiche di qualunque ordine; maſſimamentecchè ſi moſtra una ſpecie d'analogía trai coefficienti delle lettere ne' termini delle ſerie aritmetiche, ed i coefficienti de' termini delle potenze; così nell' eſpreſſione delle ſerie aritmetiche di terz' ordine, i coefficienti del terzo termine $d + 2c + b$ ſono i coefficienti del quadrato d'un binomio; i coefficienti del quarto termine ſono i coefficienti del cubo... ec.

116. Con ſimili rifleſſioni fatte ſulle formole delle ſomme generali, ſi ha per le ſerie aritmetiche

di primo ordine

$$S = \frac{m}{1} b + \frac{m . \overline{m-1}}{1 . 2} a$$

di ſecond' ordine

$$S = \frac{m}{1} c + \frac{m . \overline{m-1}}{1 . 2} b + \frac{m . \overline{m-1} . \overline{m-2}}{1 . 2 . 3} a$$

di terz' ordine

$$S = \frac{m}{1} d + \frac{m . \overline{m-1}}{1 . 2} c + \frac{m . \overline{m-1} . \overline{m-2}}{1 . 2 . 3} b + \frac{m . \overline{m-1} . \overline{m-2} .}{1 . 2 . 3}$$

$$\frac{\overline{m-3}}{4} a .$$

...... ec.

117. Dalla ſola iſpezione di queſte formole, e dal num. 97. ſi ha un metodo facile per trovare il termine generale, e la ſomma generale d'una ſerie aritmetica di qualunque ordine. Si prendano come al num. 97. le differenze prime, ſeconde,... $n^{eſime}$ della data ſerie; chiamando a il primo termine della colonna A, chiamando b il primo termine della colonna B, chiamando c il primo termine della colonna C.... ec.; ſi ha

T

$$T = a + \frac{m-1}{1} b + \frac{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}}{1\,.\,2} c + \frac{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}\,.\,\overline{m-3}}{1\,.\,2\,.\,3} d$$
$+ \ldots\ldots$ ec.

$$S = \frac{m}{1} a + \frac{m\,.\,\overline{m-1}}{1\,.\,2} b + \frac{m\,.\,\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}}{1\,.\,2\,.\,3} c + \frac{m\,.\,\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}\,.}{1\,.\,2\,.\,3}$$
$$\frac{\overline{m-3}}{4} d + \ldots\ldots \text{ ec.}$$

118. A fare meglio ſentire l'utilità delle due precedenti formole, gioverà l'eſempio ſeguente. Si cerchi il termine generale, e la ſomma generale della ſerie aritmetica 2 ; 9 ; 24 ; 50 ; 90 ; . . . . ec.

Nel metodo del P. Riccati: 1.° Conviene eſaminare, quali ſiano le differenze coſtanti di queſta ſerie; ſi avrà

A	B	C	D
2			
9	7	8	
24	15	11	3
50	26	14	3
90	40		
⋮			
ec.			

cioè le differenze terze ſono coſtanti.

2.° La formola del termine generale per le ſerie di terze differenze coſtanti è $A + Bm + Cm^2 + Dm^3$; che mettendo $m=1$ rappreſenterà il primo termine 2 della ſerie data; mettendo $m=2$ rappreſenterà il ſecondo termine 9... ec.; ſi avrà dunque

$$\begin{aligned} A + B + C + D &= 2 \\ A + 2B + 4C + 8D &= 9 \\ A + 3B + 9C + 27D &= 24 \\ A + 4B + 16C + 64D &= 50 \end{aligned}$$

3.° Diſpo-

3.° Diſponendo per ordine le differenze di queſte equazioni; cioè ſottraendo la prima dalla ſeconda, la ſeconda dalla terza, e la terza dalla quarta, ſi ha

$$\begin{aligned} B + 3C + 7D &= 7 \\ B + 5C + 19D &= 15 \\ B + 7C + 37D &= 26 \end{aligned}$$

Le differenze di queſte tre equazioni, danno

$$\begin{aligned} 2C + 12D &= 8 \\ 2C + 18D &= 11 \end{aligned}$$

Le differenze di queſte due, danno finalmente $D = \frac{1}{2}$.

4.° Rimontando da queſto valore di D ai valori di C, B, A colle ſolite ſoſtituzioni, ſi ha $A=0$ $C=1$

$$B = \frac{1}{2} \quad D = \frac{1}{2}$$

donde ſi avrà $T = \frac{1}{2} m + m^2 + \frac{1}{2} m^3$.

119. Per trovare S, ſi ſcelga la formola $Am + Bm^2 + Cm^3 + Dm^4$; 1.° Soſtituendo $m-1$ invece di m, e ſottraendo la nuova formola dalla formola aſſunta, ſi ha

$$\begin{aligned} &A \\ &-B + 2Bm \\ &+ C - 3Cm + 3Cm^2 \\ &- D + 4Dm - 6Dm^2 + 4Dm^3 \end{aligned}$$

2.° Paragonando il termine, che non contiene l'm col termine, che non ha l'm di T, cioè con zero, e ciaſcuno degli altri col ſuo corriſpondente in T; ſi ha

$$A = \frac{5}{12} \quad C = \frac{7}{12}$$
$$B = \frac{7}{8} \quad D = \frac{1}{8}$$

donde

donde si avrà $S = \frac{5}{12}m + \frac{7}{8}m^2 + \frac{7}{12}m^3 + \frac{1}{8}m^4$.

120. Tale è il metodo del P. Riccati; usando le formole del num. 117. basta trovare le differenze della data serie, che è il primo passo del metodo precedente, e si avrà

$$a = 2 \qquad c = 8$$
$$b = 7 \qquad d = 3$$

fatte le sostituzioni in T, ed S, sarà

$$T = 2 + \frac{m-1}{1} \cdot 7 + \frac{\overline{m-1} \cdot \overline{m-2}}{1 \cdot 2} \cdot 8 + \frac{\overline{m-1} \cdot \overline{m-2} \cdot \overline{m-3}}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 3$$

$$S = \frac{m}{1} \cdot 2 + \frac{m \cdot \overline{m-1}}{1 \cdot 2} \cdot 7 + \frac{m \cdot \overline{m-1} \cdot \overline{m-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 8 + \frac{m \cdot \overline{m-1} \cdot \overline{m-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{\overline{m-3}}{4} \cdot 3$$

Tutti gli altri termini de' T, S indeterminati svaniscono per essere uno de' loro fattori, e, f, g.... ec. eguale a zero.

121. Le formole del num. 117. mutando alcune denominazioni, e componendo i coefficienti delle lettere, che distinguono ciascun termine, si riducono alle formole del Goldbacchio (Atti di Lipsia 1720.). Aveva certamente in vista queste formole il P. Riccati, quando disse nella prefazione del suo Commentario; *Regulae, quam sine demonstratione attulit Goldbacchius, neque apparet unde deduxerit, in mea methodo genuinum fundamentum habebis*. Confesso sinceramente, che, prima di pensare a Goldbacchio, dalla sola applicazione del metodo del P. Riccati alle generali espressioni delle serie aritmetiche, io m'era dedotte le predette formole, e che leggendo poi a caso la memoria del Goldbacchio, a mala pena mi sono accorto, che le sue formole si potevano ridurre alle mie. Io non so come siasi mai egli indotto quest' autore a mettere l'*eccettera* dopo cinque termini

mini della sua formola, non iscoprendosi all' occhio nessuna legge de' coefficienti. Restano adunque in quest' articolo dimostrate, e dedotte dal metodo del P. Riccati anche le formole del Goldbacchio.

122. Ciocchè s'è fatto per le serie aritmetiche, si può parimenti stendere alle serie geometriche, ed alle composte d'amendue. Si multiplichino le formole aritmetiche del num. 87., termine per termine, coi termini di varie progressioni geometriche indeterminate, e prese dal num. 84. del libro precedente; alle nuove formole, che si avranno da queste multiplicazioni, si applichi successivamente il metodo del P. Riccati, e si avrà la costante legge per trovare senz'altro calcolo il T, e l'S. Noto però, che fatto il calcolo, non ho trovate formole tanto eleganti, quanto per le serie aritmetiche; ma sono tali, per cui si schivano varie equazioni di terzo grado, e di grado più elevato, che sono inevitabili nel metodo del P. Riccati in varie serie geometriche. Noi passiamo oltre a cose più interessanti.

Passaggio dalle serie interrotte alle serie continuate.

123. Io chiamo *serie interrotta* una serie A' formata da termini presi ad eguali intervalli di termini r, in una data serie qualunque A; e questa serie A la chiamo serie continuata. Il problema, che prendo a sciogliere nel presente articolo è il seguente: *Data la legge, che regna in una serie qualunque interrotta, o aritmetica, o geometrica, o comunque composta da queste due, trovare il* T, *e l'*S *della sua continuata.*

124. La soluzione di questo problema, dipende da uno de' seguenti due teoremi.

Teorema primo. Il termine m^{esimo} d'una serie interrotta A' è l'$(\overline{m-1} \cdot r + m)^{esimo}$ della sua continuata A.

 Teo-

Teorema secondo. Il termine m^{esimo} d'una serie continuata A è l' $\frac{m-r}{r+1}^{esimo}$ della sua interrotta A'.

Il primo teorema è manifesto dalla formazione della serie A'. Per avere il secondo termine di A', si deve ommettere dopo il primo termine di A un numero r di termini; cioè il secondo termine di A' è l'$(1+\overline{r+1})^{esimo}$ di A; per avere il terzo termine di A', si deve ommettere un altro numero r di termini dopo l'$(1+\overline{r+1})^{esimo}$ di A; cioè il terzo termine di A' è l'$(1+\overline{r+1}+\overline{r+1})^{esimo}$, ossia il $(2r+3)^{esimo}$ di A; così il quarto di A' si troverà essere il $(3r+4)^{esimo}$ di A, e da qui già si conosce generalmente, che l'm^{esimo} di A' è l'$(\overline{m-1}.r+m)^{esimo}$ di A.

Il secondo teorema si deduce facilmente dal primo. Si chiami m la classe del termine m^{esimo} della serie continuata, ed m' quella del termine m^{esimo} della interrotta; Sarà per il teorema precedente $m'=\overline{m-1}.r+m=mr+m-r=\overline{r+1}.m-r$;

donde $m'+r=\overline{r+1}.m$, cioè $m=\frac{m'+r}{r+1}$.

Si noti, che, nelle due formole precedenti l'm, e l'm' indicano sempre lo stesso numero; non s'è posto l'accento al secondo m, che per distinguere l'm della serie continuata dall'm della interrotta.

125. E' più spedito l'uso del secondo teorema per la soluzione del problema proposto. Si cerchi il T, e l'S della data serie interrotta A', come se fosse una serie continuata; invece di m, si sostituisca in amendue il numero $\frac{m-r}{r+1}$; si avrà il T, e l'S della continuata A.

Sia

Sia data, a cagione d'esempio, la serie geometrica A . . . . 1 . 2 . 4 . 8 . 16 . 32 . 64 . . . ec.; da questa serie se ne formi un' interrotta, con ommettere successivamente due termini dopo il primo; si avrà la serie A' . . . . . 1 . 8 . 64 . . . ec. Il problema si riduce a trovare l'S, ed il T di A, posto, che si conosca unicamente la serie A', ed il numero r de' termini ommessi in A per formarla. Già si sa, che il termine generale di A' è 8^{m-1}; invece di m si scriva il numero $\frac{m+r}{r+1}$, cioè, nel caso nostro, si scriva $\frac{m+2}{3}$, e si avrà $8^{\frac{m+2}{3}-1}=8^{\frac{m-1}{3}}$ per termine generale della serie continuata A; e di fatti $8^{\frac{m-1}{3}}$ è eguale a 2^{m-1}, che altronde si sa essere il termine generale di A; lo stesso dicasi per l'S.

126. Uso del primo teorema. Sia data la serie interrotta di qualunque genere.

A' . . . . . f . * . * . g . * . * . h . * . * . i . * . * . k . . . . . . ec.

gli asterisci (che dovrebbero essere r in numero) posti tra un termine, e l'altro di questa serie A', tengono luogo de' termini, r in numero, che si suppongono ommessi nella serie incognita A, per formare la serie data.

1.° Si prenda indeterminatamente il termine generale per le serie d'ordine n della classe della data A; in questo T, si sostituisca invece di m il numero $\overline{m-1}.r+m$, e fatto questo nuovo m successivamente eguale ad 1 . 2 . 3 . 4 . . . . ec., si supponga T eguale al primo, al secondo, al terzo .... termine di A'. Con queste equazioni si determineranno i valori delle indeterminate del primo assunto T, che sostituiti nel T medesimo daranno il termine generale cercato.

2.° Avuto il termine generale di A per mezzo della serie A', si avrà coi metodi già spiegati, ancora l'S di A.

127. Sia,

127. Sia, a cagione d'esempio, la data serie A' una serie interrotta di una serie aritmetica, continuata A, d'ordine n, il termine generale della quale è $T = a + \frac{m-1}{1} b + \frac{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}}{1\,.\,2} c + \ldots$ ec.

E' evidente 1.° che questo T sarà eguale al primo dato termine f, se si supponga $m = 1$; sarà eguale a g, se si supponga (per il teor. 1.°) $m = r + 2$; sarà eguale al terzo h, se si supponga $m = 2r + 3$; ... ec. Cioè i valori di m in T formeranno una progressione aritmetica, che incomincia da $r + 2$, ed ha per differenza costante la quantità $r + 1$.

2.° Se la serie continuata è di differenze prime costanti, anche la data serie interrotta avrà le differenze prime costanti: Se la serie continuata è di differenze seconde costanti, anche la serie interrotta avrà le differenze seconde costanti; .... cioè l'ordine della serie continuata sarà l'ordine della interrotta.

3.° Se la serie continuata ha le differenze n^{esime} costanti, s'arriverà alle differenze costanti anche nella interrotta con $n + 1$ termini.

4.° La formola T, che rappresenta ciascun dato termine dopo le sostituzioni de' valori rispettivi di m, si romperà dopo due termini se $n = 1$, dopo tre termini se $n = 2$, dopo $n + 1$ termini per le differenze n^{esime}.

128. 1.° Adunque si avrà per il T di ciascun dato termine di A'.

$$f = a$$

$$g = a + \frac{r+1}{1} b + \frac{\overline{r+1}\,.\,\overline{r+0}}{1\,.\,2} c + \frac{\overline{r+1}\,.\,\overline{r+0}\,.\,\overline{r-1}}{1\,.\,2\,.\,3} d + \ldots \text{ec.}$$

$$h = a + \frac{2r+2}{1} b + \frac{\overline{2r+2}\,.\,\overline{2r+1}}{1\,.\,2} c + \frac{\overline{2r+2}\,.\,\overline{2r+1}\,.\,\overline{2r+0}}{1\,.\,2\,.\,3} d + \ldots \text{ec.}$$

$$k = a + \frac{3r+3}{1} b + \frac{\overline{3r+3}\,.\,\overline{3r+2}}{1\,.\,2} c + \frac{\overline{3r+3}\,.\,\overline{3r+2}\,.\,\overline{3r+1}}{1\,.\,2\,.\,3} d + \ldots \text{ec.}$$

$$i = a + \frac{4r+4}{1} b + \frac{\overline{4r+4}\,.\,\overline{4r+3}}{1\,.\,2} c + \frac{\overline{4r+4}\,.\,\overline{4r+3}\,.\,\overline{4r+2}}{1\,.\,2\,.\,3} d + \ldots \text{ec.}$$

$$l = a + \ldots \text{ ec.}$$

2.° In questa serie d'equazioni se ne dovranno prendere due, cominciando da f, se $n = 1$; se ne dovranno prendere tre, se $n = 2$, e per le differenze n^{esime} se ne dovranno prendere $n + 1$. Il secondo membro di ciascuna di queste equazioni, toltane la prima, dovrà sempre avere un numero $n + 1$ termini; cioè ciascuna ne avrà tanti nel secondo membro, quante sono le equazioni prese. Con queste equazioni si determineranno le indeterminate a, b, c.... per ogni caso.

129. Applico il metodo alle serie aritmetiche di terzo ordine. Per queste non si richieggono più di quattro termini f, g, h, k, e le equazioni saranno le prime quattro del num. precedente terminate inclusivamente al termine, che contiene il d: prendendo le differenze di queste equazioni, e le differenze delle differenze, ... come al num. 81, si avrà

fatto

A	B	C	D
f			
...	p		
g	...	t	
...	q	...	u
h	...	v	
...	s		
k			

$$a = f$$

$$b = \frac{p}{(r+1)} - \frac{rt}{2(r+1)^2} + \frac{r\,.\,\overline{2r+1}\,.\,u}{6(r+1)^3}$$

$$c = \frac{t}{(r+1)^2} - \frac{ru}{(r+1)^3}$$

$$d = \frac{u}{(r+1)^3}$$

130. Quindi si formino le quattro colonne A, B, C, D delle differenze de' dati termini interrotti, come al num. 97., e

ſi chiamino (per tenere denominazioni analoghe a quelle del num. 117.) a', b', c', d' i primi termini delle colonne medeſime, e per le ſerie di differenze terze coſtanti

fatto $a = a'$

$$b = \frac{b'}{(r+1)} - \frac{r\,c'}{2\,(r+1)^2} + \frac{r\,.\,\overline{2\,r+1}\,.\,d'}{6\,(r+1)^3}$$

$$c = \frac{c'}{(r+1)^2} - \frac{r\,d'}{(r+1)^3}$$

$$d = \frac{d'}{(r+1)^3}$$

ſarà $T = a + \frac{m-1}{1}\,b + \frac{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}}{1\,.\,2}\,c + \frac{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}\,.\,\overline{m-3}}{1\,.\,2\,.\,3}\,d.$

131. E' evidente, che ſe le ſerie interrotte ſaranno di ſecondo ordine, ſvaniranno nelle formole precedenti il d, e tutte le quantità, nelle quali c'entra d': Se le ſerie interrotte ſaranno di primo ordine ſvaniranno nelle formole precedenti il c, d, e tutte le quantità, ove c'entra c', d'. Quindi

Per le ſerie di differenze ſeconde coſtanti

fatto $a = a'$

$$b = \frac{b'}{(r+1)} - \frac{r\,c'}{2\,(r+1)^2}$$

$$c = \frac{c'}{(r+1)^2}$$

ſarà $T = a + \frac{m-1}{1}\,b + \frac{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}}{1\,.\,2}\,c.$

Per

Per le ſerie di differenze prime coſtanti

fatto $a = a'$

$b = \frac{b'}{(r+1)}$ ſarà $T = a + \frac{m-1}{1}\,b$

132. Se ſi applicaſſe il metodo medeſimo alle ſerie aritmetiche d'ordine più elevato del terzo, ſi troverebbe una coſtante legge de' valori di a, b, c... ec. Si troverebbe a cagione d'eſempio, che diſponendo queſti valori come al num. 130., dovrebbero corriſponderſi nella prima colonna, per numeratori gli a', b', c'... ec., e per denominatori le potenze o . 1 . 2 . 3 .. ec. di $r+1$ preſe per ordine; nella ſeconda colonna, per numeratori gli $1\,c'$, $2\,d'$, $3\,e'$, $4\,d'$... ec. ciaſcuno multiplicato per r, e per denominatori il doppio delle potenze 2 . 3 . 4 . 5 ... di $r+1$ preſe per ordine; nella terza colonna... ec. In queſta guiſa ſi avrebbe poi in generale, e ſenz' altro calcolo, il valore di ciaſcuna lettera a, b, c... ec. per le ſerie aritmetiche d'ordine n; ed ancora d'ogni altra ſerie.

133. Si noti la differenza de' due metodi precedenti. Nel termine generale, e nella generale ſomma d'una ſerie continuata di qualunque genere, per eſempio delle ſerie aritmetiche, entrano due ſole indeterminate, cioè gli m, e gli a, b, c... ec. Col primo teorema (num. 124.) ſi è cercato quali doveſſero eſſere le variazioni degli a, b, c... ec., ed il ſecondo teorema ci ha date le variazioni degli m, per paſſare dalle ſerie interrotte ſuppoſte note, alle continuate ſuppoſte ancora ſconoſciute.

Interpolazione delle ſerie.

134. *INterpolare* una data ſerie, ſignifica inſerire tra due qualunque ſuoi termini un dato numero r di termini intermedj, che ſeguano la medeſima legge della ſerie data. Se la

data

data ſerie è una ſerie aritmetica di primo ordine , s'è già dato al num. 78. del libro precedente il metodo d'interpolarla ; così pure al num. 65. ſi è eſpoſto il metodo d'interpolare le ſerie geometriche di primo ordine. Ma oltrecchè que' metodi ſono aſſai faticoſi per la pratica, maſſimamente quando ſi debba interpolare tutta la ſerie fino al termine m^{esimo}, il problema, che noi ci proponiamo al preſente comprende tutte le ſerie d'ordine n di qualunque genere, o ſommabili, o no, purchè di eſſe ſi poſſa trovare il termine generale.

135. Il problema della interpolazione, non è, a parlare con rigore, che una parte di quello, che abbiamo ſciolto nell' articolo precedente. La ſerie data a interpolarſi corriſponde alla noſtra ſerie interrotta, e la ſerie, che ſi avrà dopo l'interpolazione, corriſponderà alla noſtra ſerie continuata. Dico *corriſponderà*, perchè la ſerie continuata non ſarà propriamente la ſerie interpolata, non cercandoſi in tutto coll' interpolazione, che termini $n(r+1)+1$, e col termine generale della ſerie continuata, ſi trovano tutti gli altri termini all' infinito; onde il problema dell' articolo precedente è più generale di quello della interpolazione.

136. Si aggiunge, che coll' interpolazione non ſi cercano il più delle volte tutti i termini della ſerie interpolata, ma ſolamente l' s^{esimo} degli r poſti fra l' m^{esimo}, e l' $(m+1)^{esimo}$ della ſerie data. Or chi voleſſe ſciogliere il problema dell' interpolazione col metodo dell' articolo precedente, dovrebbe:

1.° Cercare coi termini della data ſerie, il termine generale T della corriſpondente ſerie continuata.

2.° Dovrebbe cercare quale termine ſia di tutta la ſerie data, e ſuppoſta interpolata l' s^{esimo} cercato.

3.° E finalmente ſoſtituire in T invece di m il numero, che ne indica la claſſe.

137. Eſempio. Si cerchi il termine quinto de' cinque interpolati tra i termini 78., e 300. della ſerie aritmetica

$A' \ldots 0 . 78 . 300 . 666 \ldots$ ec.

1.° Si ha (num. 130.) $TA = \frac{m-1}{1} 3 + \frac{\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1 \;.\; 2} 4$,

oppure trovato $TA' = \frac{m-1}{1} 78 + \frac{\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1 \;.\; 2} 144$,

ſi ha (num. 125.) $TA = \frac{m-1}{1} 13 + \frac{\overline{m-1}.\overline{m-7}}{1 \;.\; 2} 4$.

2.° Il quinto termine cercato trai due della data ſerie A' ſarebbe il dodiceſimo della interpolata A; come ſi può vedere contando nella ſerie A' i dati termini, e gli aſteriſci, che ſi frappongano tra l'uno, e l'altro invece de' termini interpolati.

A 0 . * . * . * . * . * . 78 . * . * . * . * . * . 300 ... ec.

3.° Si dovrà dunque ſupporre in uno dei TA trovati, $m = 12$, e ſi avrà pel quinto termine cercato 253.

Ciocchè s'è fatto qui per avere il quinto termine de' cinque interpolati tra 78 e 300 di A', è evidente, che ſi può egualmente fare per qualunque altro s^{esimo} degli r interpolati tra due qualunque termini di qualunque ſerie. Ma ad alcuni ſembra nojoſo il dovere badare ogni volta a quel valore di m da ſoſtituirſi in TA. Ho penſato perciò di ſchivare per l'interpolazione, anche queſt' incomodo, col metodo ſeguente.

138. *Trovare il termine* s^{esimo} *degli* r *interpolati tra il termine* m^{esimo}, *ed* $(m+1)^{esimo}$ *d'una data ſerie* A'.

1.° Si cerchi il termine generale T di A'. 2.° Si ſoſtituiſca in T il numero $m + \frac{s}{r+1}$ invece di m.

Così per avere il quinto termine de' cinque interpolati tra 78, e 300 della ſerie

$A' \ldots 0 . 78 . 300 . 666 \ldots$ ec.

Si

Si ha 1.° $TA' = \frac{m-1}{1} 78 + \frac{\overline{m-1} . \overline{m-2}}{1 . 2} 144$.

2.° Per eſſere $m = 2$, $r = 5$, $s = 5$, ſoſtituendo invece di m il numero $m + \frac{s}{r+1} = 2 + \frac{5}{6} = \frac{17}{6}$, ſi ha $(\frac{17}{6} - 1) 78 + (\frac{17}{6} - 1)$ $(\frac{17}{6} - 2) (\frac{144}{2} = \frac{11}{6} 78 + \frac{11}{6} . \frac{5}{6} . 72 = \frac{11}{6} (78 + \frac{5}{6} . 72) = \frac{11}{6}$ $(78 + 60) = \frac{11}{6} . 138 = 253$, come ſi era avuto prima.

139. Dimoſtrazione del metodo. Si indichi per m la claſſe, che occupa in A qualunque termine t, e per m' ſi indichi la claſſe, che il medeſimo t occupa in A'; è chiaro, che gli m, m' ſaranno qui numeri ſempre diverſi.

La ſerie A contiene tutti i termini di A', e di più tutti gli $s^{eſimi}$ degli r ommeſſi per formare A'; quindi in A' non ſi contengono, che i termini $(m-s)^{eſimi}$ di A; cioè gli $m'^{eſimi}$ di A' ſono gli $(m-s)^{eſimi}$ di A; ma per il teorema 1.° num. 124. gli $m'^{eſimi}$ di A' ſono gli $(\overline{m'-1} . r + m')^{eſimi}$ di A; dunque gli $(m-s)^{eſimi}$ di A ſono gli $(\overline{m'-1} . r + m')$ del medeſimo A.

Quindi $m - s = \overline{m'-1} . r + m' = m'r + m' - r$; ed $m' . \overline{r+1}$ $+ s = m + r$, oſſia $m' + \frac{s}{r+1} = \frac{m+r}{r+1}$; cioè il numero $m' + \frac{s}{r+1}$ è eguale al numero, che ſoſtituito in TA' ha dato (num. 137.) l' $s^{eſimo}$ cercato.

140. Si noti: 1.° Che prima d'applicare i metodi del num. 136. 138. all' interpolazione delle ſerie, conviene bene diſtinguere di quale claſſe eſſe ſieno, ſe aritmetiche, o geometriche, o compoſte d'amendue, o d'altra ſpecie qualunque: Ciò è neceſ-

neceſſario per trovare il vero termine generale delle date ſerie, con cui unicamente ſi troveranno coi metodi preſcritti gli eſatti termini intermedj.

2.° Che ſi propongono talvolta certe ſerie a interpolarſi, di cui non ſi ſa ben deffinire a quale claſſe appartengano; in queſti caſi converrà oſſervare a quale claſſe s'accoſtino di più, per quindi maneggiarle come ſe veramente foſſero di quella claſſe. Così nel calcolare i luoghi de' Pianeti ſi è oſſervato, che le ſerie de' luoghi de' medeſimi, dedotte, o dalla oſſervazione, o dalle tavole per diverſi tempi dati, più s'accoſtano alle ſerie aritmetiche, che non ad altre; quindi nel determinare le loro poſizioni intermedie a' tempi, ed alle poſizioni date, ſi ſuole ſempre ad eſſi applicare il metodo delle ſerie aritmetiche. Il Sig. De La Lande (Acad. Par. an. 1761. p. 125., ed Aſtr. l. 24.) ha dimoſtrato con molta preciſione, che per i calcoli aſtronomici, baſta ridurre colle medie aritmeticamente proporzionali le differenze ſeconde, o al più le terze, ad eſſere coſtanti.

3.° Che in queſti caſi l'interpolazione non ſarà che approſſimata; e perchè approſſimi ſempre più nel determinare col noſtro metodo il termine generale delle ſerie, converrà uſare certe avvertenze, che ſuggerirà l'eſperienza, e l'uſo del calcolo; le principali ſono di prendere per a' il termine $m^{eſimo}$, tra il quale, e l' $(m+1)^{eſimo}$ ſi deve determinare l' $s^{eſimo}$ degli r; così il b' ſarà la differenza dell' $m^{eſimo}$, e dell' $(m+1)^{eſimo}$, il c' ſarà .....; ed il numero $m + \frac{s}{r+1}$ da ſoſtituirſi in TA' invece di m, ſi trasformerà in $1 + \frac{s}{r+1}$; queſti ſono compedj del num. 138.

141. Il Sig. Mouton è ſtato il primo a proporre il problema delle interpolazioni nell' anno 1670. Non ſi tardò a conoſcere di quanta importanza eſſo foſſe per tutta la Matematica pura, e miſta; ed i migliori Matematici di queſto ſecolo hanno

 preſo

preſo ad illuſtrarlo, ed a ſcioglierlo con metodi tutti tra ſe diverſi, e tutti degni del vaſto loro intendimento. Siano date due ſerie qualunque di quantità tali, che a ciaſcun termine d'una ſerie corriſponda con data legge un termine dell' altra; e ſi chiamino *funzioni* i termini della prima ſerie, e *radici* i termini della ſeconda: *Data una radice qualunque ſi cerca la funzione corriſpondente, e data una funzione qualunque ſi cerca la corriſpondente radice*. Queſto problema è ſtato ſciolto analiticamente dal Mayer (Acad. Petr. T. 2. p. 180.), e le formole del Mayer ſono ſtate ridotte a più ſemplice forma dall' Abbate La-Caille (Aſtr. Sol. P. 1. Sez. 1.). Il Newton (libr. 3. Princ. & Arit. Univ.); ed il Cotes (de Cal. diff. Newt.), rappreſentando le radici con aſciſſe d'una curva, e le funzioni colle corriſpondenti ſemi-ordinate riduſſero alla geometría il problema medeſimo: *Deſcrivere una linea curva di genere parabolico, che paſſi per punti comunque dati*. Aggiungi a queſti il celebre Stirling verſo il fine dell' egregio ſuo trattato ſulle interpolazioni delle ſerie. Puoi ancora leggere i Commentarj ſul ſec. libr. di Newton (num. 75. 76. 77.) de' PP. Le Seur, e Jacquier, ed altri, ch' io qui non nomino per brevità.

142. Io mi ſono preſa la cura di leggere attentamente tutti i metodi de' citati Autori, e di ben penetrare le diverſe ſtrade, per cui ciaſcuno s'avvia al medeſimo termine; ma finalmente ſono entrato nel penſiere del Sig. De La Lande (Aſtron. l. 24. num. 3172.), cioè, che tutti, o la maggior parte di que' metodi non potevano mai eſſere d'un uſo famigliare, comunque il problema delle interpolazioni ſia aſſai frequente nella Matematica, principalmente nell' Aſtronomía. Il principale loro difetto ſi è di non potere per lo più determinare veruno de' termini intermedj ſenza conoſcere, e paſſare per i termini precedenti, con infinite, e nojoſiſſime ſoſtituzioni. Credo, che il mio metodo per ciaſcuna claſſe, ed ordine di ſerie ſuppliſca generalmente

mente a queſto incomodo; i calcoli mi ſembrano facili, e brevi più di quello, forſe, ſi poteva ſperare.

143. Non voglio qui ommettere due elegantiſſimi metodi per interpolare le ſerie aritmetiche, almeno fino alle terze differenze *incluſive*; queſti ſono i ſoli trai già pubblicati, che all' evitare tutti gli inconvenienti de' primi, congiungono una maravigliosa brevità nell' eſpreſſione, ed una eguale facilità ne' calcoli. Suppongo qui ancora, che ſi cerchi un intermedio tra l' $m^{eſimo}$, e l' $(m+1)^{eſimo}$ della data ſerie aritmetica. Il primo metodo ſi trova uſato, ma non dimoſtrato, nè eſpoſto in tutta la ſua generalità pel ſecondo caſo d'un problema de' logaritmi logiſtici nel tanto famoſo libro intitolato: *Table of Logarithms* di Villelmo Gardinero (Londra. 1742.). Si chiami a, ciocchè per noi è $\frac{s}{r+1}$, ſi chiami b, ciocchè in noſtro linguaggio ſarebbe $\frac{s}{r+1}-1$, e finalmente ſi chiamino d', d'', d''' le differenze prime, ſeconde, e terze de' numeri dati. La quantità x da aggiungerſi al $m^{eſimo}$ per avere il termine cercato, ſarà

Per le ſeconde differenze

$$x=(d'+\frac{1}{2}b\,d'')\,a$$

Per le terze differenze

$$x=(d'+\frac{1}{2}b\,d''+\frac{1}{6}d'''.\overline{b+b^2})\,a.$$

L'altro metodo è del più volte citato Sig. De La Lande (Acad., ed Aſtr. luogo citato). Chiama egli p il noſtro s, chiama m il noſtro $r+1$, d la differenza del termine $m^{eſimo}$, ed $(m+1)^{eſimo}$, tra i quali ſi cerca il $p^{eſimo}$, e d^2, d^3 le differenze ſeconde, e terze de' dati termini. La quantità x da aggiungerſi all' $m^{eſimo}$ per avere il termine cercato, ſarà

Per

Per le differenze ſeconde

$$x = p\frac{d}{m} + p\frac{p-m}{2}\cdot\frac{d^2}{m^2}$$

Per le differenze terze

$$x = p\frac{d}{m} + p\frac{p^2-m^2}{6}\cdot\frac{d^3}{m^3}$$

144. Si noti: 1.° Che nelle formole del Gardinero, d' è poſitivo, quando i termini diſpoſti per l'interpolazione vanno creſcendo; d'' è parimenti poſitivo, quando le prime differenze vanno ſcemando; d''' è ſimile a d'', quando le ſeconde differenze vanno ſcemando, altrimenti avrà un ſegno contrario a d''. 2.° Che nelle formole del De La Lande il primo termine è in amendue lo ſteſſo, ed è il quarto proporzionale dell' analogía $m:d::p$: al quarto, ed il ſecondo termine è in amendue diverſo. La variazione de' ſegni in queſte formole ſono ſimili a quelle del Gardinero.

145. Eſſendo generali le formole del Gardinero, del De La Lande, e le mie, non poſſono eſſere diverſe, che nell' eſpreſſione; così tutte le ſtrade, per cui gli Analiſti cercarono la ſoluzione delle equazioni di terzo grado andarono a terminare ſempre nella formola Cardanica. E di fatti le differenze prime, ſeconde, terze, ſono indicate

dal Gardinero per	d', d'', d'''
dal Sig. De La Lande per	d, d^2, d^3
da me per	b, c, d;

gli a, b del Gardinero ſono gli $\frac{p}{m}$, $\frac{p}{m}-1$ del Sig. De La Lande; ed il mio valore di m da ſoſtituirſi invece di m in TA', cioè (num. 140. 3.°) $1+\frac{r}{r+1}$ ſi riduce all' $1+\frac{p}{m}$ del Sig. De La Lande, ed al $1+a$ del Gardinero; del reſto le formole ſono tutte identiche.

146. Ma:

146. Ma: il mio metodo 1.° non ſi riſtringe ſolo alle ſerie aritmetiche, ma indefinitamente a qualunque ordine, o genere di ſerie, di cui aſſegnare ſi poſſa il termine generale.
2.° Applicato alle ſerie aritmetiche, ſi poſſono uſare le differenze quarte, quinte, $n^{eſime}$, con quella facilità, con cui nel mio, e negli altri due metodi ſi uſano le differenze ſeconde, e terze, vedendoſi ſubito in TA' la legge de' termini.
3.° Soſtituendo nel mio TA' il numero $1+\frac{p}{m}$, oppure $1+a$ invece di m, ed indicando colle lettere del Sig. De La Lande, o con quelle del Gardinero le differenze de' dati termini, ſi formeranno facilmente le formole per le differenze più alte, ſecondo il metodo di queſti Autori; formole, che non ſi ſaprebbero per altra via determinare ſenza un calcolo aſſai proliſſo, ed intralciato.

Nota al fine.

Al num. 51. ho eſpoſto un teorema per iſciogliere una frazione, che abbia per numeratore l'unità, e per denominatore un prodotto di più fattori qualunque, in più frazioni, ciaſcuna delle quali abbia per numeratore la ſteſſa unità, e per denominatore abbia uno de' medeſimi fattori.

Per dimoſtrare quel teorema ho ſeguito il metodo indicato dalla Sig.ra Agneſi, di ridurre allo ſteſſo denominatore la frazione data, e la ſomma delle derivate da eſſa, riuſcendo la dimoſtrazione faciliſſima nel caſo di due ſoli fattori eſpreſſo da eſſa Sig.ra Agneſi, ma che ſale ad un numero di termini impraticabile, per poco, che creſca il numero de' medeſimi fattori. Rifletten do dappoi ad un metodo di dimoſtrar queſta regola comunicatomi in una ſua lettera dal P. Franceſco Gianella giovane Geſuita ben avvanzato in queſti ſtudj, trovo la dimoſtrazione medeſima aſſai ſemplice, e corta, ſervendo ſempre la formola

pre-

precedente dimostrata, insieme con quella de' due soli fattori per andare avanti alla seguente, in cui vi sia un fattore di più.

I.° *Caso* $\frac{1}{xy}=\frac{1}{x(y-x)}+\frac{1}{y(x-y)}$

Imperocchè $\frac{1}{x(y-x)}+\frac{1}{y(x-y)}=\frac{1}{x(y-x)}-\frac{1}{y(y-x)}$

$$=\frac{y-x}{xy(y-x)}=\frac{1}{xy}$$

Si sono solamente mutati i segni nel secondo termine, indi fatta la somma dopo la riduzione allo stesso denominatore, si è diviso il numeratore, e il denominatore per lo stesso $y-x$.

Nel seguente caso di tre fattori, si scioglierà la formola de' primi due in due, indi ciascuna di queste due in altre due, e ne nasceranno quattro, ma le due ultime de' due binarj si mostreranno uguali ad una sola terza.

II.° *Caso* $\frac{1}{xyz}=\frac{1}{x(y-x)(z-x)}+\frac{1}{y(x-y)(z-y)}+\frac{1}{z(x-z)(y-z)}$

Imperocchè 1.° *sciogliendo* $\frac{1}{xy}$, *e moltiplicando per* $\frac{1}{z}$, *si ha*

$$\frac{1}{xyz}=\frac{1}{xz(y-x)}+\frac{1}{yz(x-y)},$$

2.° *sciogliendo* $\frac{1}{xz}$, *e moltiplicando per* $\frac{1}{y-z}$, *si ha*

$$\frac{1}{xz(y-x)}=\frac{1}{x(z-x)(y-x)}+\frac{1}{z(x-z)(y-x)},$$

3.° *sciogliendo* $\frac{1}{yz}$, *e moltiplicando per* $\frac{1}{x-y}$, *si ha*

$$\frac{1}{yz(x-y)}=\frac{1}{y(z-y)(x-y)}+\frac{1}{z(y-z)(x-y)}$$

Ora i primi due termini di questi binarj un per uno sono gli stessi, che nel secondo membro dell' equazione appartenente al caso II.°, *avendo*

avendo gli stessi binomj, benchè trasposti, e il terzo di esso membro qui è uguale a' due ultimi; giacchè sciogliendo $\frac{1}{(x-z)(y-z)}$, *e moltiplicando per* $\frac{1}{z}$, *si ha* $\frac{1}{z(x-z)(y-z)}=\frac{1}{z(x-z)(y-x)}+\frac{1}{z(y-z)(x-y)}$. *Basta riflettere, che* $(y-z)-(x-z)=(y-x)$, *ed* $(x-z)-(y-z)=(x-y)$.

III.° *Caso* $\frac{1}{xyzv}=\frac{1}{x(y-x)(z-x)(v-x)}+\frac{1}{y(x-y)(z-y)(v-y)}+\frac{1}{z(x-z)(y-z)(v-z)}+\frac{1}{v(x-v)(y-v)(z-v)}$

Imperocchè 1.° *sciogliendo* $\frac{1}{xyz}$ *pel caso* II.°, *si ha*

$$\frac{1}{xyzv}=\frac{1}{xv(y-x)(z-x)}+\frac{1}{yv(x-y)(z-y)}+\frac{1}{zv(x-z)(y-z)}$$

2.° *sciogliendo* $\frac{1}{xv}$, *si ha*

$$\frac{1}{xv(y-x)(z-x)}=\frac{1}{x(v-x)(y-x)(z-x)}+\frac{1}{v(x-v)(y-x)(z-x)}$$

3.° *sciogliendo* $\frac{1}{yv}$, *si ha*

$$\frac{1}{yv(x-y)(z-y)}=\frac{1}{y(v-y)(x-y)(z-y)}+\frac{1}{v(y-v)(x-y)(z-y)}$$

4.° *sciogliendo* $\frac{1}{zv}$, *si ha*

$$\frac{1}{zv(x-z)(y-z)}=\frac{1}{z(v-z)(x-z)(y-z)}+\frac{1}{v(z-v)(x-z)(y-z)}$$

Ora i primi tre termini di questi tre ternarj sono gli stessi, che nel secondo membro dell' equazione del caso III.°, *avendo gli stessi binomj,*

nomj, benchè qui l' ultimo di quel membro ſia il primo; e il quarto di eſſo è uguale qui a' tre ultimi; giacchè ſciogliendo $\frac{1}{(x-v)(y-v)(z-v)}$, *e facendo la ſteſſa rifleſſione al reſiduo dalla ſottrazione di un fattore dall' altro, ſi ha* $\frac{1}{v(x-v)(y-v)(z-v)} = \frac{1}{v(x-v)(y-x)(z-x)} +$

$$\frac{1}{v(y-v)(x-y)(z-y)} + \frac{1}{v(z-v)(x-z)(y-z)}.$$

IV.° *Caſo* $\frac{1}{xyzvt} = \frac{1}{x(y-x)(z-x)(v-x)(t-x)}$

$$+ \frac{1}{y(x-y)(z-y)(v-y)(t-y)} + \frac{1}{z(x-z)(y-z)(v-z)(t-z)}$$

$$+ \frac{1}{v(x-v)(y-v)(z-v)(t-v)} + \frac{1}{t(x-t)(y-t)(z-t)(v-t)}$$

Imperocchè 1.° *ſciogliendo* $\frac{1}{xyzv}$ *pel caſo* II.°, *ſi ha*

$$\frac{1}{xyzvt} = \frac{1}{xt(y-x)(z-x)(v-x)} + \frac{1}{yt(x-y)(z-y)(v-y)}$$

$$+ \frac{1}{zt(x-z)(y-z)(v-z)} + \frac{1}{vt(x-v)(y-v)(t-v)}$$

2.° *ſciogliendo* $\frac{1}{xt}$, *ſi ha* $\frac{1}{xt(y-x)(z-x)(v-x)}$

$$= \frac{1}{x(t-x)(y-x)(z-x)(v-x)} + \frac{1}{t(x-t)(y-x)(z-x)(v-x)}$$

3.° *ſciogliendo* $\frac{1}{yt}$, *ſi ha* $\frac{1}{yt(x-y)(z-y)(v-y)}$

$$= \frac{1}{y(t-y)(x-y)(z-y)(v-y)} + \frac{1}{t(y-t)(x-y)(z-y)(v-y)}.$$

4.° *ſcio-*

4.° *ſciogliendo* $\frac{1}{zt}$, *ſi ha* $\frac{1}{zt(x-z)(y-z)(v-z)}$

$$= \frac{1}{z(t-z)(x-z)(y-z)(v-z)} + \frac{1}{t(z-t)(x-z)(y-z)(v-z)}$$

5.° *ſciogliendo* $\frac{1}{vt}$, *ſi ha* $\frac{1}{vt(x-v)(y-v)(z-v)}$

$$= \frac{1}{v(t-v)(x-v)(y-v)(z-v)} + \frac{1}{t(v-t)(x-v)(y-v)(z-v)}$$

Ora i primi quattro termini di queſti quattro binarj ſono gli ſteſſi, che nel ſecondo membro dell' equazione del caſo IV.° *avendo gli ſteſſi binomj, benchè qui l' ultimo di quel membro ſia il primo; e il quinto di eſſo è uguale qui a' quattro ultimi; giacchè ſciogliendo* $\frac{1}{(v-t)(x-v)(y-v)(z-v)}$ *colla ſteſſa rifleſſione al reſiduo della ſottrazione di un fattore dall' altro, ſi ha* $\frac{1}{t(x-t)(y-t)(z-t)(v-t)}$

$$= \frac{1}{t(x-t)(y-x)(z-x)(v-x)} + \frac{1}{t(y-t)(x-y)(z-y)(v-y)}$$

$$+ \frac{1}{t(z-t)(x-z)(y-z)(v-z)} + \frac{1}{t(v-t)(x-v)(y-v)(z-v)}$$

Così ſi anderebbe avanti ad un numero maggiore di fattori, ſervendoſi ſempre della formola precedente per la ſeguente.

Per dimoſtrare la formola de' fattori m *ſi ſcioglie la precedente delli* $m-1$ *in frazioni* $m-1$. *Indi colla formola di due fattori ſi ſcioglie ognuna di eſſe in altre due. Le prime di tutti queſti binarj di frazioni ſaranno le ſteſſe, che le prime* $m-1$ *della formola, che ſi deve dimoſtrare: tutte le ſeconde inſieme ſi trovano uguali alla ſola ultima di eſſa formola, dividendo anche queſta colla formola de' fattori* $m-1$ *non più più ſemplici, ma binomj, tali però, che ſottraendo*

 cia-

ciascun di essi da' suoi compagni, ne nascono alcuni binomj colla ellisione di un termine comune. Il calcolo riesce trattabilissimo, anzi semplice. Si vede anche da questo esempio, quanto importi il pigliar una dimostrazione pel verso suo: un metodo porta giri lunghissimi, e un altro scorta la strada, e riduce ad una maravigliosa semplicità le cose, che prese con altro metodo riescono complicatissime.

AGGIUNTA

DI DUE MEMORIE

DEL PADRE

RUGGIERO GIUSEPPE BOSCOVICH

DELLA COMPAGNIA DI GESU'

PUBBLICO PROFESSORE DI MATEMATICA NELLA REGIA UNIVERSITA' DI PAVIA.

MEMORIA PRIMA.

Metodo di evitare i logaritmi negativi.

1. IN tutte le forme de' logaritmi, che sono in uso, come in quelli delle tavole comuni, e negli iperbolici, il logaritmo di ogni frazione è negativo, la quale cosa disturba il calcolo, essendo molesta la sottrazione delle mantisse formate da varie figure decimali, e convenendo nelle somme sommar da se i positivi, indi da se i negativi, e poi sottrarre la somma minore dalla maggiore, triplicandosi così in certa maniera il calcolo. Quindi torna bene l'avere qualche metodo da evitare i logaritmi negativi, come già da varj anni si è cominciato a praticare, e vi vogliono delle regole sicure, e facili per non errare nella pratica.

2. Si otterrà facilmente questo fine, se al logaritmo di qualunque frazione se ne sostituisca un altro, il quale nasca da un' aggiunta, che se gli fa, senza, che questa aggiunta turbi il calcolo, ove si badi a quello, che si è aggiunto per tenerne conto al luogo debito.

3. Due sorti di frazioni distingueremo: La prima sorte sarà della forma decimale, in cui dopo la virgola divisoria, o venga immediatamente una delle 9 figure significanti, o vi sieno degli zeri, e chiameremo n il numero totale delle figure decimali, N l'intero espresso dalle medesime prese senza la virgola divisoria: tanto nella frazione 0, 752, quanto nella 0, 00752 sarà $N = 752$; ma nella prima $n = 3$, nella seconda $= 5$. La seconda sorte di frazioni sarà della forma $\frac{1}{B}$, o B sia un intero, o un rotto decimale; benchè in questo secondo caso facilmente si riduce alla forma $\frac{C}{B}$; mentre se $B = \frac{N}{(10)^n}$, sarà $\frac{1}{B} = \frac{(10)^n}{N}$;

ma

ma noi sempre la considereremo sotto la forma, in cui il numeratore sia $= 1$.

4. In ordine alle espressioni decimali noterò qui particolarmente quello, che per altro è cosa cognita, e appartiene generalmente anche agli interi. *La sola mantissa determina le figure del numero corrispondente ad un logaritmo, e viceversa: la caratteristica determina il sito della virgola divisoria rispetto ad esse, e ne viene determinata.* Se la caratteristica sarà r, dipende tutto dal valore della formola $r + 1$. Se questa è $= 0$, essendo $r = -1$, le figure vanno subito dopo la virgola, senza zeri immediati dopo di essa: se contiene un numero negativo coll' essere r negativo maggiore dell' unità, vi vogliono dopo la virgola immediati tanti zeri, quante unità essa esprime: se contiene un valor positivo, altrettante di quelle figure si devono pigliar per l' intero, supplendo con degli zeri al fine, se non bastano, o mettendo le residue dopo la virgola per decimali, se avvanzano.

5. Se si cerca la corrispondenza delle figure colla mantissa, conviene andare al fin della tavola, e cercarla fra que' numeri, che abbiano il massimo numero di figure, a cui si stendono esse tavole, ove o si troverà esatta, o si potrà cercare più prossima col metodo usato delle differenze proporzionali, o anche delle interpolazioni. Siccome il logaritmo di un numero A si scrive $l A$, la sola mantissa si può qui dinotare per $p A$.

6. Ora pel nostro fine di evitare i logaritmi negativi aggiungeremo qui in amendue queste sorti di frazioni al logaritmo volgare il 10, bastando questo, come è facile a vedere, per tutte quelle, che non sono minori di $\frac{1}{(10)^{10}}$: le minori non sogliono occorrere nell' uso ordinario, e quando occorrano per qualche caso straordinario, daremo il metodo di evitare anche allora i logaritmi negativi. Il logaritmo così accresciuto lo chiameremo *gran logaritmo*, esprimendolo per $L A$.

7. Con-

7. Considereremo ancora il complemento logaritmico di un numero, il quale si forma, sottraendo dal 9 tutte le precedenti figure del suo logaritmo, e l'ultima dal 10, ciocchè si fa facilmente, pigliando immediatamente dalle tavole invece delle figure ivi notate il complemento di quelle al 9 di questa al 10. Questo complemento logaritmico lo dinoteremo per $l' A$.

8. Dalle posizioni fatte, facilmente si ricavano le seguenti formole: 1.° $l' A = 10 - l A$, 2.° $l A = 10 - l' A$, 3.° $L A = 10 + l A$, 4.° $l A = -10 + L A$, 5.° $L \frac{1}{A} = l' A$, 6.° $L \frac{1}{A} (= l' A) = n + l' N$, ove sia $A = \frac{N}{(10)^n}$.

La prima nasce dalla definizione del complemento logaritmico (n. 7.): La seconda vien dalla prima trasponendo: La terza dalla definizione del gran logaritmo (n. 6.): La quarta dalla terza pur trasponendo: La quinta dalla 3, e 1 così: $L \frac{1}{A} = 10 + l \frac{1}{A} = 10 - l A = l' A$: La sesta dalla prima così. Essendo $A = \frac{N}{(10)^n}$, sarà $l A = -n + l N$, e $l' A = 10 + n - l N = n + l' N$.

9. Si ha inoltre, che *la mantissa del gran logaritmo è la stessa, che del volgare;* giacchè nella formola 3. si muta la sola caratteristica coll' aggiunta di 10.
Per la caratteristica r la formola sarà $r - 9$. Se sarà $r - 9 = 0$, cioè $r = 9$; sarà per la quarta formola la caratteristica di $l A = 9 - 10 = -1$, caso, in cui (n. 4.) tutte le figure dovute alla mantissa vanno subito dopo la virgola senza zeri. *Quindi, se* $r - 9 = \pm t$, *sarà t il numero delle figure intere avanti alla virgola, o degli zeri immediati dopo di essa.*

10. Dalle cose dimostrate si ricavano le seguenti tre regole fondamentali.

I. Il

I. *Il complemento logaritmico di un numero intero, ſi ha pigliando nelle tavole comuni il complemento di ogni figura precedente del ſuo logaritmo al* 9, *e dell' ultima al* 10, *e per un numero decimale di* n *figure, baſta il pigliare i complementi ſuddetti pel logaritmo del numero eſpreſſo dalle ſteſſe figure, e aggiungere* n *alla caratteriſtica.*

II. *Per avere il gran logaritmo di una frazione, che abbia l'unità per numeratore, ſi piglj il complemento logaritmico del ſuo denominatore.*

III. *Per avere il gran logaritmo di una frazione decimale, ſi piglj la mantiſſa del numero intero eſpreſſo dalle ſue figure colla caratteriſtica* 9, *o ſe ha un numero* t *di zeri immediati dopo la virgola,* 9 — t.

Della prima la prima parte ſi ha dalla definizione del complemento aritmetico, la ſeconda parte dalla formola ſeſta: La ſeconda regola è contenuta nella formola quinta: La terza nella ſeſta.

11. Paſſando alle potenze, e radici: Se A eſprime una frazione, o dell' una, o dell' altra ſorte, ſi avrà

$$L A^m = -10(m-1) + m L A.$$

Imperocchè $L A^m = 10 + l A^m = 10 + m l A =$ (formola 3.) $10 - 10 m + m L A = -10(m-1) + m L A$.

12. Se invece di una potenza intera ſi abbia una radice m, baſterà mettere $\frac{1}{m}$ invece di m. Quindi

$$L A^{\frac{1}{m}} = -10\left(\frac{1}{m} - 1\right) + \frac{1}{m} L A = \frac{10(m-1) + L A}{m}.$$

Ne naſcono altre due regole

IV. *Per avere il gran logaritmo di una potenza* m *di una frazione, ſi moltiplichi per* m *il ſuo gran logaritmo, e ſi levi dalla ſua caratteriſtica* 10 (m — 1).

V. *Per*

V. *Per averlo di una radice* m, *ſi aggiunga alla caratteriſtica del ſuo gran logaritmo* 10 (m — 1), *indi il tutto ſi divida per* m.

13. Metteremo qui gli eſempj corriſpondenti alle regole.

$m = 3 \quad A = \frac{1}{752}$	$A = \frac{1}{0.00752} \; n = 5$	$A = 0,00752 \; t = 2$
$l\,752 = 2,87622$	$l'\,752 = 7,12378$	$p\,752 = 0,87622$
	$n = 5$	$9 - t = 7$
$L A = l'\,752 = 7,12378$	$L A = 12,12378$	$L A = 7,87622$
3	3	3
$21,37134$	$36,37134$	$23,62866$
-20	-20	-20
$L A^3 = 1,37134$	$L A^3 \; 16,37134$	$L A^3 \; 3,62866$
$L A = 7,12378$	$12,12378$	$7,87622$
20	20	20
$27,12378 \mid 3$	$32,12378 \mid 3$	$27,87622 \mid 3$
$L A^{\frac{1}{3}} = 9,04126$	$L A^{\frac{1}{3}} = 10,70793$	$L A^{\frac{1}{3}} = 9,29207$

14. Vi ſia ora un valore $A = \frac{B C D A \ldots ec.}{M N P \ldots ec.}$, e ſi cerchi $L A$.

Si avrà $L A = 10 + l A = 10 + l B + l C$ ec. $- l M - l N$ ec.

In queſta formola ſe tra' fattori B, C, D ec. vi ſono de' rotti, ſi avranno i logaritmi negativi, e i logaritmi di M, N ec. dovendoſi ſottrarre, vengono a turbare, come ſe foſſero negativi. Quindi ſervendoſi della 4., e 6. formola del num. 8., e conſiderando i diviſori, come fattori della forma $\frac{1}{M}$, ſe ſia m il numero di tutte le quantità, converrà dalla ſomma di tutti i gran logaritmi levare $10 m$, e aggiungervi 10. Così ſi avrà

$$L A = -10(m-1) + L B + L C + L D \text{ ec.} + l' M + l' N + l' P \text{ ec.}$$

15. Pel

15. Pel fine, che ſi ricerca, non occorre pigliare i gran logaritmi de' fattori interi del numeratore, per poi ſottrarli nel $-10(m-1)$; ma baſta pigliarli ne' ſoli fattori frazionarj, o ſieno decimali del numeratore, o naſcano dalla unità diviſa per ogni fattore del denominatore. Si avrà la ſeguente regola.

VI. *Per avere il gran logaritmo di una formola ſemplice, che abbia nel numeratore fattori decimali* m, *e nel denominatore fattori qualunque* n, *ſi piglino i logaritmi volgari di tutti gli interi del numeratore, i gran logaritmi delli decimali di eſſo, e i complementi logaritmici de' fattori del denominatore, e fattane la ſomma, ſi levi dalla ſua caratteriſtica* $10(m+n-1)$.

$$A = \frac{2347 \times 358 \times 0,275 \times 0,00752}{37 \times 249 \times 00153} \quad m = 2,\ n = 3$$

$$\begin{array}{lll}
l\ 2347 & = 3,37051 & \\
l\ 358 & = 2,55388 & \\
L\ \ 0,275 & = 9,43933 & \\
L\ \ 0,00752 & = 7,87622 & \\
l'\ 37 & = 8,43180 & \\
l'\ 249 & = 7,61320 & \\
l'\ \ 0,0153 & = \underline{8,18469} & \\
 & \ 45,58963 & 0,58963 = p\,3887 \\
-10(m+n-1) & = \underline{-40} & 5-9=-4 \\
L\,A & = \ \ 5,58963 & A = 0,00003887 \ (\text{n. } 9.)
\end{array}$$

16. Se vi foſſero ſtate delle potenze de' rotti, o delle radici; ſi ſarebbero trovati i loro gran logaritmi colle regole 5, e 6, e ſi ſarebbero adoprati al modo ſteſſo.

17. La ſottrazione, che ſi è fatta qui nella caratteriſtica, eſſendo di un corto numero di diecine, ſi poteva fare ſenza ſcriverla, levando via nel portar le diecine per la ſomma quel-

lo

le 4. che corriſpondevano alle 5. frazioni, e così ſi uſa realmente. Si uſa anche, ſenza adoprare il ſegno L, di mettere il ſegno l, e ſcrivere non il logaritmo volgare, ma l' accreſciuto di una diecina, che io ho qui chiamato gran logaritmo. Dove vi ſono i diviſori, io ſono pur ſolito, come ho fatto qui, per evitare la ſottrazione de' loro logaritmi, ſervirmi de' complementi logaritmici, evitandoſi così la ſottrazione di una mantiſſa dall' altra, la qual coſa può farſi ogni volta, che occorra di dover ſottrarre qualche logaritmo: in queſto caſo non può ſcriverſi nell' eſempio propoſto ſenza falſità $l\ 37 = 8,43180$, ma, o conviene dare un ſegno al complemento logaritmico, come ho fatto, mettendo un l' accentato, o conviene ſcrivere $l\,\frac{1}{37}$, ſe invece di l' ſi vuole ſcrivere l.

18. Baſta dunque, comunque uno voglia ſcrivere, (benchè per le diverſe coſe ſia meglio adoprar diverſi ſegni), baſta, dico, badar a *prendere i logaritmi volgari de' fattori interi del numeratore, i logaritmi accreſciuti di* 10 *de' rotti decimali, i complementi logaritmici de' fattori del denominatore, accreſcendo, ſe queſti ſon decimali, i complementi dell' intero da eſſi eſpreſſo, nelle caratteriſtiche di tante unità, quante ſono in tutto le figure di ciaſcuno, indi nel far la ſomma levare tante diecine, da quelle, che ſi porterebbero indietro, quante conviene, ſcrivendo il reſiduo. Per avere il logaritmo volgare biſognerebbe levarne tante, quanti ſono ſtati in tutto i fattori frazionarj del numeratore, e i fattori qualunque del denominatore, e allora ſe la caratteriſtica rimane* r, *le figure avranno interi avanti alla virgola, o zeri dopo di eſſa* $r-1$ (n. 4.), *ſecondo che ſarà poſitivo, o negativo un tal valore, rimanendo le coſe nello ſtato della teoria comune de' logaritmi*.

19. *Se ciò non ſi può, perchè il numero delle diecine ſia maggiore*, (come lo ſarebbe nel propoſto eſempio, in cui ſi portavano 4. diecine, che ânno dato il 45. nella caratteriſtica, e per avere

il

il logaritmo volgare se ne sarebbero dovuti levare 5, per li 5 fra rotti nel numeratore, e fattori nel denominatore) *allora vanno levate diecine una meno* (come si è fatto qui, levandone 4), *rimane quello, che abbiamo chiamato gran logaritmo, che dà il numero cercato, dando colla mantissa le figure, e determinando la sede della virgola colla formola* r $-$ 9 (n. 9.). Qui nell' esempio posto al n. 15. si è così trovato di fianco il numero A, in cui essendo $r-9=5-9=-4$, si sono messi dopo la virgola 4. zeri, pigliando 0, 00003887 pel valore cercato di A.

20. Può darsi il caso, che non si possano sottrarre neppure tante diecine una meno, come sarebbe seguito qui, se la somma delle caratteristiche fosse stata 35, o 25. In tal caso non si sarebbe evitato un negativo, e converrebbe, se non si usa altro artificio, mutar anche la mantissa, ed avere un logaritmo negativo col sottrarre all' opposto la trovata somma da 40, 00000. Ciò accaderebbe per la troppa piccolezza del numero corrispondente al logaritmo, a cui non arriva la forza del 10 aggiunto (n. 6.). Vi è però un artificio facile ivi promesso per evitare anche allora la sottrazione delle mantisse. *Basta levare quante diecine si può, e mettere innanzi alla caratteristica col segno negativo quelle diecine di più, che non si sono sottratte; indi nel numero alli zeri dati da* r $-$ 9 *aggiungere altrettante diecine di zeri*. Imperocchè se quel residuo si dica r', e le diecine non sottratte sieno t; sarà l'intero $r=r'-t$, onde $r-9$ avrà -20 di più del semplice $r'-t$.

21. Se fosse venuta la somma 25, 58963; non potendosi levare 4 diecine, si sarebbe potuto scrivere $-20+5$, 58963, e il numero A, invece di avere zeri 4, ne avrebbe dovuti avere 24. Al modo stesso nel primo esempio del n. 13., se si fosse cercata la ottava potenza di $A=\frac{1}{752}$, moltiplicando $LA=7$, 12378 per 8, si sarebbe avuto 56, 99024, e si sarebbe dovuto sottrarre 70. Conveniva scrivere $-20+6$, 99024, e dove al $LA^3=1$, 37134 corrispondeva $A^3=0$, 00000002351 con otto zeri per essere $1-9=-8$, per A^8 vi sarebbero voluti dopo la linea zeri 23 prima di 9778, per essere $6-9=-3$, e $-20-3=-23$.

22. Lo stesso anderebbe praticato in ogni altra congiuntura, in cui per le regole suddette venisse nella caratteristica un numero maggiore da doversi sottrarre da un minore: o converrebbe tener a mente il numero delle diecine, che non si sono potute sottrarre, o per non dimenticarsene, anderebbero piuttosto segnate innanzi col segno negativo; ma questo ripiego non sarà mai necessario, fuori che ove occorrano frazioni minori delle espresse da una figura, che sia la decima dopo la virgola, cioè di $\frac{1}{10000000000}$.

23. L'aggiunta, che si è fatta di 10 al logaritmo volgare di un numero per mutarlo in un altro, che si è qui chiamato gran logaritmo, se si facesse a tutti i logaritmi delle tavole comuni, si avrebbero nuove tavole di una forma di logaritmi ricavata da una idea di essi più generale. Comunque una progressione geometrica si combini con un' aritmetica, si ponno i termini di questa chiamare logaritmi de' termini corrispondenti di quella, ed essi pure avranno la proprietà, che i logaritmi di 4. termini geometricamente proporzionali sono aritmeticamente proporzionali; onde datine i primi tre, si troverebbe il logaritmo del quarto col sottrarre il logaritmo del primo dalla somma de' logaritmi degli altri due. Di questa natura sarebbero i logaritmi di quelle nuove tavole; giacchè un' aggiunta di un termine costante a tutti i termini di una progressione aritmetica non ne turba nè la natura, nè la ragion comune, e solo trasporta più indietro il limite tra i positivi, e i negativi.
Ma ove all' 1 non corrisponda nella progressione aritmetica lo zero,

zero, non ſi ha la formola $lab = la + lb$, da cui ne vengono le altre tre $l\frac{a}{b} = la - lb$, $la^m = mla$, $la^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m} la$. Tutte ſarebbero alterate dal logaritmo dell' unità, che converrebbe aggiungere, o ſottrarre una, o più volte; giacchè eſſendo $1 . a :: b . \frac{ab}{1} = ab$, ſarebbe $lab = la + lb - l1$. Per queſto ſi è combinato ne' logaritmi, che ſono in uſo, l' 1 collo zero, acciò come quello non altera le quantità nella moltiplicazione, o diviſione, così queſto non le alteri nella ſomma, o ſottrazione.

24. Queſto è un gran vantaggio, per l' uſo grande, di cui ſono que' teoremi; ma è inſeparabile dallo ſvantaggio di avere negativi, o i logaritmi di tutte le frazioni, o (ſe ſi voleſſero poſitivi i logaritmi di queſte col combinare una progreſſione aritmetica creſcente con una geometrica decreſcente) i logaritmi degli interi; mentre all' oppoſto ove il logaritmo dell' unità è molto grande, rimangono poſitivi i logaritmi di tutte le frazioni, che non abbiano un denominatore maggiore di quel logaritmo dell' unità, che nel caſo noſtro viene ad eſſere quel 10, che ſi è aggiunto a tutti i logaritmi volgari delle tavole comuni per farli divenire gran logaritmi, e coll' ajuto loro evitare i negativi in tutte le frazioni non minori di $\frac{1}{(10)^{10}}$.

25. Il diſturbo, che recavano i logaritmi negativi, fu riconoſciuto fino dal principio della loro invenzione, riuſcendo eſſi molto incomodi particolarmente nella Trigonometria, in cui vengono in uſo i logaritmi delle funzioni degli archi, e nelle tavole vi ſi mettono quelli de' ſeni, e delle tangenti. Deſiderandoſi di prendere l'unità pel raggio del circolo, o ſia pel ſeno tutto, venivano a riuſcire frazioni ſemplici tutti i ſeni, e tutte le tangenti fino a' 45. gradi, che ſono minori dell' unità, rimanendo maggiori dell' unità tutte le altre tangenti, ed eſſendo pur

pur maggiori dell' unità tutte quante le ſecanti: quindi venivano ad eſſere negativi i logaritmi di tutti i ſeni, e della metà delle tangenti, rimanendo poſitivi tutti quelli dell' altra metà di tangenti, e tutti quelli delle ſecanti.

26. Vi fu, chi rifflettendo all' eſſere più frequente l'uſo de' ſeni, oltrechè le tangenti, e ſecanti ſi ânno dipendentemente da eſſi, per eſſere al raggio $= 1$ tang. $A = \frac{ſin.\ A}{coſ.\ A}$, e ſec. $A = \frac{1}{coſ A}$, credette foſſe coſa opportuna il combinar appunto una delle due progreſſioni decreſcente coll' altra creſcente, per avere poſitivi tutti i logaritmi de' ſeni, e ne pubblicò le tavole. Ma oltrechè vi era un qualche imbarazzo nella coſtituzione de' logaritmi per i ſeni, contrarj a quella de' numeri eſprimenti i lati de' triangoli piani, e di altri valori, a' quali ſi paſſava oltre nel calcolo (benchè per altro queſto era ſenza grande conſeguenza negli uſi ordinarj, ne' quali entrano i ſoli rapporti tra i ſeni, e il raggio), non ſi otteneva il fine pienamente, venendo ſempre negativi i logaritmi della metà delle tangenti ricavate da' ſeni, e i logaritmi di tutte le ſecanti.

27. Quindi fu comunemente abbracciato l'altro partito, di abbandonare l'unità pel valore del raggio, e concepirlo diviſo in un gran numero di parti, ſoſtituendo così a quell' unità più grande, un' unità più piccola, dalla quale ripetuta molte volte foſſe formata queſta, e in queſte unità furono trovati, ed eſpreſſi tutti i ſeni, tangenti, e ſecanti naturali, e furono inſeriti nelle tavole. Baſtava fare il raggio $= 1000000$ per avere eſpreſſo co' numeri interi il ſeno anche di un minuto ſecondo, che allora viene ad eſſere $= 48, 5$; ma per abbondare ſi è fatto nelle tavole più comuni $= 10000000$, onde anche un terzo ha il ſeno eſpreſſo con un intero venendo $= 8$.

28. Così anche i logaritmi de' ſeni degli angoli piccoliſſimi venivano ad eſſere poſitivi, rimanendo negativi quelli ſoli, che

appartengono ad angoli comunemente disprezzati per la eccessiva loro piccolezza: ma il logaritmo del raggio riusciva incomodo, venendo ad essere = 7, 000 ec., numero non così comodo ad aggiungere, e levare nelle occasioni richieste dalla multiplicazione, e divisione pel raggio. Quindi per li logaritmi de' seni si concepì il raggio diviso in un numero di parti espresso da un' unità con 10 zeri, venendo così ad essere il logaritmo di esso raggio = 10 . 000 ec., benchè insieme si lasciò nelle stesse tavole diviso per li seni naturali in parti 10000000, senza che queste due unità diverse turbassero il calcolo, sì perchè i seni al raggio $(10)^7$, si riducono a que' del $(10)^{10}$ col solo aggiungere 3 zeri al fine, sì, e molto più, perchè le ragioni de' seni fra se, e al raggio, le quali sole per l'ordinario vengono considerate, rimangono le medesime, con qualunque unità si misurino, ed esprimano.

29. Questa sorte di logaritmi de' seni al raggio $(10)^{10}$, rispetto a' logaritmi de' seni al raggio = 1, sono appunto lo stesso, che i nostri gran logaritmi rispetto a' logaritmi volgari; giacchè anche qui diviene = 10 il nuovo logaritmo di quella, che prima era un' unità maggiore, ed ora è divenuto un numero grosso di unità minori, ogni seno viene espresso col numero, con cui sarebbe stato espresso essendo il raggio = 1, ma moltiplicato per $(10)^{10}$, ed ogni logaritmo uguale al logaritmo di quella ipotesi accresciuto di 10 unità nella sua carateristica.

30. Questo è stato l'unico rimedio adoprato per un pezzo per evitare nella Trigonometría i logaritmi negativi, e anche per questo si soleva introdurre nelle formolette, che per l'ordinario erano semplici, e corte, e nelle proporzioni l'espressione del raggio fatto = R, per poter tener conto del suo logaritmo, e aggiungerlo, o sottrarlo. Ma cominciato a introdursi in questi ultimi tempi l'uso delle formole assai più complicate, e più frequentemente adoprate nella Trigonometría, e in tutta l'Astronomía, anzi l'uso de' seni, e tangenti anche più generalmente nella Geometría per le proprietà delle curve, e nella sublime analisi per le integrazioni, si è tornato in esse a considerare il raggio = 1, per risparmiare la sua espressione, e rendere tanto più semplici le formole, col renderle meno caricate di simboli, ritenendo per altro le espressioni logaritmiche così, come si trovano nelle tavole comuni. Quindi realmente nelle medesime tavole si trovano per la serie naturale de' numeri i logaritmi volgari, e nelle tavole de' logaritmi, de' seni, e tangenti, (i quali logaritmi si chiamano anche seni, e tangenti artificiali) i logaritmi volgari de' seni computati al raggio = $(10)^{10}$, ma che sono que', che qui abbiamo chiamati gran logaritmi per li seni computati al raggio = 1, richiedendo l'uso di essi l'avvertenza al numero delle volte, che va nelle formole stesse considerata l'ommissione della espressione del raggio, la quale cosa non è difficile ad aversi, attesa l'omogeneità, che rispetto alle espressioni de' seni, e tangenti, e del raggio, devono introdurvi le proporzioni, per le quali sole essi entrano nelle medesime formole.

31. Introdotto già l'uso di considerare il raggio = 1, e di servirsi delle tavole comuni per li logaritmi de' seni, si è ito innanzi ad aggiungere una diecina di unità a' logaritmi delle altre frazioni, per evitare in esse ancora i logaritmi negativi; ed io qui ripigliando la cosa da' suoi principj, ho date le regole generali, le quali sono semplici, e piane, e serviranno per evitare sempre i logaritmi negativi di tutte le frazioni non minori di $\frac{1}{(10)^{10}}$, anzi per evitare ogni sottrazione di qualunque logaritmo, e anche nelle frazioni minori senza alcun logaritmo negativo, evitar sempre ogni sottrazion di mantissa, e rimediare con una pratica semplicissima a qualunque inconveniente, che possa occorrere ancora nelle caratteristiche.

APPENDICE

Su i Logaritmi delle quantità negative.

32. AVendo parlato nella presente Memoria de' logaritmi negativi, era troppo naturale il trattare ancora de' logaritmi delle quantità negative, su i quali si mosse già la controversia tra il Leibniz, e il Bernoulli, come si vede nel loro Commercio epistolico al tomo 2. della pag. 269., sostenendo il primo, che essi erano immaginarj, e che la logaritmica aveva un solo ramo sopra l'asse, e il secondo, che erano reali, e uguali a' logaritmi delle medesime quantità prese positivamente, avendo la stessa curva due rami infiniti sopra, e sotto l'asse uniti fra loro colla continuità geometrica. A questo fine, mentre già si stampava quest' Opera avevo studiata a fondo tutta la materia all' idea di aggiungere per modo di appendice l'esame di essa, e il mio sentimento distesο. Nello stendere l'appendice mi è cresciuta fra le mani la materia in modo, che veniva ad essere, come suol dirsi, molto maggiore la giunta della derrata. Quindi ho giudicato di fare una Memoria a parte su questo argomento, che ho già distesa, e pubblicherò altrove.

33. Intanto per chi vorrà istruirsi di questa controversia dirò qui, quali sono i documenti, che mi sono capitati in mano, appartenenti ad essa. Si rinnovò la questione nel 1746., e 1747. fra il d'Alembert, e l'Eulero, per via di lettere, che a mia notizia non ânno veduta ancora la pubblica luce, stando il primo pel Bernoulli, e il secondo pel Leibniz. Uscì in conseguenza nel 1751. nel tomo di Berlino pel 1749. una Memoria dell' Eulero, che non fa menzione di quel suo carteggio col d'Alembert, in cui crede di avere sopita per sempre la controversia coll' avere trovato, che ogni quantità ha infiniti logaritmi, i quali per le negative sieno tutti immaginarj, per le positive lo sieno tutti fuori di uno solo reale: con questo ritrovato, crede di conciliare tutte le difficoltà, dandola così vinta al Leibniz.

34. Non si acquietò il d'Alembert a questa decisione, e non solo non credette dimostrata la sentenza dell' Eulero, ma credette all' opposto di poter egli validamente sostenere l'opinione contraria del Bernoulli, e pubblicò nel 1761. nel primo tomo de' suoi Opuscoli una Memoria a questo fine, in cui parla delle suddette sue lettere, e risponde a tutti gli argomenti, e difficoltà dell' Eulero.

35. Intanto nelle Memorie di Berlino del 1755. il Walmesley aveva inserita una Memoria sullo stesso argomento, in cui dimostra le stesse formole dell' Eulero, ma insiste sulla inutilità della questione, persuaso col Leibniz, che i segni non entrando ne' rapporti, non vi sia vera proporzione tra i positivi, e negativi come tali, e in conseguenza, che è cosa inutile il pensare a' logaritmi, che dovrebbero misurare questi rapporti.

36. Nelle Memorie di Torino vi è nel primo tomo uscito l'anno 1759. una Memoria su questo del Sig. Cav. di Foncenex, in cui sostiene coll' Eulero la sentenza del Leibniz, e dimostra con un terzo metodo le stesse formole dello stesso Eulero, ma nel secondo tomo per l'anno 1760., e 1761. ve n'è un' altra, in cui dopo veduta la Memoria del d'Alembert, rimane contro di lui nella parte aritmetica della questione, ma muta parere in ordine alla continuità de' due rami della logaritmica, quale crede di dimostrare con un suo nuovo argomento ivi prodotto.

37. Nella Enciclopedia vi è l'articolo *logaritmo* steso dal d'Alembert molti anni prima, ma pubblicato nell' anno scorso 1766., nel quale sostiene la stessa sua opinione, accennando alcune ragioni, e rimettendosi ad alcuni de' suddetti monumenti, parte de' quali ivi nomina. Inclina al fine a credere, che vi sia dentro della lite di voce.

38. Finalmente vi è anche qualche cosa su questo argomento

to ne' 12. Commentarj del P. Scarrella pubblicati l'anno scorso 1766. nel Commentario 4. dal num. *36.*, trattandone per occasione dell'uso, che ne viene nel volere determinare il movimento di un punto attratto ad un centro con alcune leggi di forze.

39. Io sono persuaso, che tutte le difficoltà, e contraddizioni nascano appunto dalla oscurità, e mancanza di precisione delle idee attaccate ad alcuni nomi da' moderni Matematici; onde ne nascano tante liti fra loro, mentre la pacifica Geometría de' Greci n'è priva affatto. Tali sono a mio giudizio le idee delle quantità immaginarie, che sono assurde, dell' infinito assoluto, che mena prima a de' misterj, indi a degli assurdi, come ho fatto vedere nel terzo tomo de' miei Elementi, quelle degli infinitamente piccoli mal concepiti da alcuni, e però trattati in modo da incorrere in errori; benchè di questi, e degli indefinitamente grandi si possano avere delle idee precise, e delle leggi sicure per bene adoprarli, come ho fatto vedere molti anni addietro nella mia Dissertazione *de natura, & usu infinitorum, & infinite parvorum*. Idee incerte pure, e confuse, credo, che si abbiano della natura delle quantità negative, sulla quale ancora si litiga, e molto più della idea di multiplicazione, e divisione fatta per una quantità negativa, e dell' idea di rapporto, o proporzione geometrica, ove questa parola si applichi alle quantità negative, e positive mescolate insieme: o così pure non è netta l'idea delle potenze delle quantità negative, che ne dipende, e nelle quali nascono de' grandi imbarazzi, massime ove l'esponente sia indefinito.

40. Sopra ogni altra cosa la lite della parte geometrica, credo, che nasca dall' essere affatto vaga, e indeterminata l'idea della continuità geometrica presa in generale. Per le curve algebraiche vi è almeno un criterio di tale continuità nella semplicità della equazione della curva, irresolubile in due, dalla multiplicazione delle quali ella nasca, donde se ne potrebbe cavare

vare

vare una precisa deffinizione di nome, pigliandola nel senso, in cui si adopra da' Geometri in questi casi.

41. Converrà però badar bene di non mescolarvi dopo delle idee attaccate dalla lingua comune alla parola continuità; mentre così si troveranno appartenenti ad una stessa curva continua più rami anche finiti, e separati l'uno dall' altro in modo, che mai non si incontrino, come ve ne sono due nella concoide di base circolare, ove il polo sia preso dovunque tra il centro, e la circonferenza, esprimendosi la natura di amendue questi rami da un' unica equazione indivisibile di sesto grado. Allora non sarà il perimetro intero unito con una sola linea non interrotta in modo, che da un suo punto a qualunque altro si possa giugnere con un cammino continuato nel senso della lingua non geometrica, ma comune.

42. Ma per le curve transcendenti non vi è nè deffinizione netta, nè criterio universalmente accettato, e tale, che applicato alle curve in generale non faccia in qualche caso a calci coll' altro delle curve algebraiche, onde se ne deduca insieme l'esservi, e il non esservi continuità.

43. Io svolgo a pieno tutto questo nella Memoria suddetta, e mostro, che parlando condizionatamente, si può sostenere quello, che uno vuole. Ma in modo particolare fo vedere, in che cosa consista il nodo principale, e l'origine di tutte le contraddizioni, nelle quali si urta, nella parte analitica. Esso nodo consiste nella combinazione delle seguenti due regole comuni.

I. *I segni conformi nella multiplicazione rendono il* $+$, *i difformi il* $-$.

II. *Quando una quantità si concepisca indeterminatamente in modo, che si accosti ad un' altra oltre ogni limite, si attribuisce a questa quel valore, a cui oltre ogni limite si è accostato il valore trovato per quella.*

44. La prima di queste regole determinando i valori di $x = a^r$ nelle diverse supposizioni di r, forma il nodo in vigore del seguente teorema, che si concepisce facilmente, ma che io rigorosamente dimostro.

Dato

Dato un qualunque valore r, *ſi può trovare una frazione, che ne ſia o maggiore, o minore, come uno vuole, che ne differiſca di una quantità minore di qualunque dato* b *comunque piccola, e che abbia il ſuo numeratore, e denominatore, come uno vuole, o amendue ſpari, o amendue anche imparimente pari, o ſpari quel de' due, che ſi vuole, e l'altro pari.*

45. Finiſco la mia ricerca con un' avvertenza eſſenziale, ed è, che tutta queſta lite non intereſſa punto l'uſo comune de' logaritmi in Trigonometría, ed Aſtronomía, pel quale ſono ſtati iſtituiti, cioè di facilitare con ſicurezza il calcolo numerico col ſoſtituire le ſomme, e ſottrazioni alle multiplicazioni, e diviſioni con quello, che ne dipende per le potenze. Se ſi trova la formola $\frac{abc}{mn}-\frac{d^2e^3}{f^4g}$, ſi faccia $\frac{abc}{mn}=r$, $\frac{d^2e^3}{f^4g}=t$. Indi ſi trovi tanto l'r, quanto il t numeri poſitivi coll' ajuto de' logaritmi, pigliando $lr=la+lb+lc-lm-ln$, e $lt=2ld+3le-4lf-lg$, e poi ſi piglj $r-t$, che ſi avrà l'intento ſenza alcun pericolo di errore, e ſenza che vi abbiano menoma difficoltà i difenſori di amendue le ſentenze, la lite de' quali riſguarda principaliſſimamente de' punti puramente ſpecolativi.

46. Non per queſto ſtimo, come penſano alcuni, inutile il trattare di una tale queſtione, perchè ſerve per acquiſtare per iſtrada una quantità di notizie intereſſanti, e ſchiarire un gran numero di idee.

MEMORIA SECONDA.

Metodo di alzare un infinitinomio a qualunque potenza indefinita.

1. Sia l'infinitinomio $a+bx+cx^2+dx^3$ ec. da alzarſi alla potenza m. Eſſa potenza avrà infiniti membri, il primo de' quali ſarà a^m, e i ſeguenti avranno le potenze x, x^2, x^3 ec. con de' coefficienti numerici, e letterali. Tutti i termini di qualunque membro corriſpondenti a qualunque potenza x^n ſi troveranno facilmente coll' ajuto di una preparazione generale per tutti.

2. Si ſcriva in una riga la ſerie naturale de' numeri, e ſotto di eſſi in un' altra ſi mettano le lettere b, c, d ec., che nel dato infinitinomio ſono loro compagne nelle potenze di x eſpreſſe da eſſi numeri.

1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . 10 ec.
b . c . d . e . f . g . h . i . k . l ec.

3. Fatta queſta preparazione generale, ſe ne faccia una particolare per i termini corriſpondenti alla potenza x^n, ſcrivendo in tante righe tutti i modi, ne' quali il numero n può eſſere compoſto di numeri interi, ove ſi comprendono anche le ſemplici unità, e lo ſteſſo n parte totale di ſe medeſimo. Ciò ſi farà facilmente ſcrivendo nella prima riga tante unità, nella ſeconda un binario colle unità reſidue, indi due binarj, e così in poi: eſauriti i binarj ſi metta un ternario colle unità, indi co' binarj, e unità, e poi ſi paſſi a più ternarj, indi al quaternario, e a più quaternarj colle combinazioni precedenti del reſiduo, e al modo iſteſſo ſi vada innanzi alle parti maggiori. L'eſempio, che ſi ha qui ſotto, farà ſchiarire il metodo.

4. Ora il membro cercato avrà tanti termini, quanti ſaranno i modi ſuddetti di comporre il numero n, determinando ciaſcuno di eſſi modi il ſuo termine, che nell' eſempio medeſimo

gli ſtarà accanto di fianco. Baſterà oſſervare le regole ſeguenti:
I. Per numeratore del coefficiente numerico ſi piglino tanti termini della progreſſione $m \,.\, m-1 \,.\, m-2$ ec., quante ſono le parti componenti.
II. Per denominatore ſi piglino altrettanti termini della ſerie naturale $1 \,.\, 2 \,.\, 3$ ec., la quale però ſi ricominci ſempre da capo dall' 1, ovunque ſi muta la groſſezza della parte.
III. Per coefficiente letterale ſi metta prima a alzato alla potenza m meno il numero delle parti, indi le lettere b, c, d ec. compagne di eſſe parti nella preparazione generale; onde ſe una parte ſarà ripetuta più volte, ſi metterà la lettera compagna coll' eſponente, che eſprima il numero di quelle parti uguali.

Eſempio $n = 6$

1.1.1.1.1.1	$\frac{m \,.\, m-1 \,.\, m-2 \,.\, m-3 \,.\, m-4 \,.\, m-5}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6} a^{m-5} b^6$
2.1.1.1.1	$\frac{m \,.\, m-1 \,.\, m-2 \,.\, m-3 \,.\, m-4}{1 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} a^{m-5} b^4 c$
2.2.1.1	$\frac{m \,.\, m-1 \,.\, m-2 \,.\, m-3}{1 \,.\, 2 \,.\, 1 \,.\, 2} a^{m-4} b^2 c^2$
2.2.2	$\frac{m \,.\, m-1 \,.\, m-2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} a^{m-3} c^3$
3.1.1.1	$\frac{m \,.\, m-1 \,.\, m-2 \,.\, m-3}{1 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3} a^{m-4} b^3 d$
3.2.1	$\frac{m \,.\, m-1 \,.\, m-2}{1 \,.\, 1 \,.\, 1} a^{m-3} bcd$
3.3	$\frac{m \,.\, m-1}{1 \,.\, 2} a^{m-2} d^2$
4.1.1	$\frac{m \,.\, m-1 \,.\, m-2}{1 \,.\, 1 \,.\, 2} a^{m-3} b^2 e$

4.2	$\frac{m \,.\, m-1}{1 \,.\, 1} a^{m-2} ce$
5.1	$\frac{m \,.\, m-1}{1 \,.\, 1} a^{n-2} bf$
6.	$\frac{m}{1} a^{m-1} g$

5. Il primo termine ha nel numeratore 6. termini della progreſſione $m \,.\, m-1$ ec., perchè 6. ſono le parti $1 \,.\, 1$. ec., le quali eſſendo tutte uguali, il denominatore ha 6. termini della ſerie $1 \,.\, 2 \,.\, 3$. ec. continuata. Le 6. parti danno anche a^{m-6}, le quali tutte corriſpondendo al b, ſi ha b^6.

6. Nel terzo termine ſi ânno nel numeratore 4. termini coll' a^{m-4}, per eſſer 4. le parti, e come eſſe dopo la ſeconda paſſano da 2 all' 1, ſi ha nel denominatore $1 \,.\, 2 \,.\, 1 \,.\, 2$, ripigliando da capo la ſerie: b^2 c^2 ſono compagne delle parti $1 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 2$.

7. Nel ſeſto termine le tre parti $3 \,.\, 2 \,.\, 1$ ſono tutte diverſe, è però il denominatore torna ſempre da capo coll' $1 \,.\, 1 \,.\, 1$.

8. La dimoſtrazione di queſto metodo dipende dalle leggi delle combinazioni. Per alzare l'infinitinomio dato alle potenze ſuperiori, conviene andarlo multiplicando per ſe medeſimo. Come le lettere a, b, c ec. ſi trovano tutte di una ſola dimenſione in eſſo, è coſa manifeſta, che nel quadrato ſaranno tutte combinate a binarj, nella terza potenza a ternarj, e così in poi; onde il coefficiente letterale dovrà in ogni termine avere dimenſioni m, ed è coſa chiara, che il primo termine ſempre conterrà il ſolo valore a, onde ſarà a^m.

9. Negli altri colle lettere b, c, d ec. vi verrà x alzato alle potenze loro compagne; onde in ogni termine la potenza x ſarà la ſomma di tutti i numeri compagni di dette lettere. Quindi dovendovi eſſere tutte le loro poſſibili combinazioni,

giacchè tutte ſi moltiplicano per tutte; la potenza n qualunque dovrà avere i termini corriſpondenti a tutti i modi, ne' quali il numero n può eſſere formato da' numeri $1 . 2 . 3$ ec., e in eſſi le lettere compagne delle parti componenti, le quali coll'a dovendo empire le dimenſioni m, dovrà l'a per eſponente avere m meno il numero di dette parti.

10. Così rimane dimoſtrata la 3. regola: le prime due ſi dimoſtrano in queſt' altro modo. Il coefficiente numerico deve eſprimere il uumero di tutte le combinazioni poſſibili dello ſteſſo numero m di lettere a, b, c, d ec. ripetute, quanto porta l'eſponente di ciaſcuna. Quindi per trovare il coefficiente numerico, baſterà il trovare un tale numero di combinazioni. Ciò ſi farà nel ſeguente lemma, e ſuoi corollarj.

11. Lemma. Se debba collocarſi un numero m di termini a, b, c ec. mutati i loro ſiti comunque, e ſi cerchi il numero di tutte le combinazioni poſſibili; ſi conſideri, che poſto il primo comunque, ſi potrà mettere il ſecondo in due ſiti, cioè innanzi, o dopo: il terzo in 3, cioè innanzi al primo, dopo di eſſo, e dopo il ſecondo; e così ſempre in poi ogni termine nuovo in un ſito di più, cioè innanzi al primo de' già collocati, o dopo di eſſo, e dopo qualunque de' ſeguenti. Quindi il numero di tutte le combinazioni ſarà il prodotto della ſerie $1 . 2 . 3 \ldots m$.

12. Corol. 1. Se vi ſia fra eſſi termini un numero r di termini, che non debbano mutarſi fra loro, ma tenendo eſſi lo ſteſſo ordine ſcambievole, debbano ſolamente mutarſi gli altri tutti tanto riſpetto a ſe ſteſſi, quanto interponendoſi comunque fra quelli; il numero delle combinazioni ſi avrà dividendo la ſerie $1 . 2 . 3 \ldots m$ per la ſerie $1 . 2 . 3 \ldots n$.

13. Imperocchè per avere l'intero numero delle combinazioni, per ogni combinazione degli altri termini, converrebbe inoltre, tenuti eſſi immobili a' loro poſti, mutare fra loro in tutte le maniere poſſibili que' termini, che non ſi mutavano, le quali maniere pel lemma ſono $1 . 2 . 3 \ldots n$, e il numero di quelle multiplicato pel numero di queſte darebbe il numero intero $1 . 2 . 3 \ldots m$. Quindi queſto diviſo per $1 . 2 . 3 \ldots n$ darà il numero cercato.

14. Corol. 2. Se il numero di tutti i termini ſia m, e il numero di quelli, che mantengono il ſuo ordine ſcambievole ſenza mutarſi ſia $n = m - r$, il numero di tutte le altre combinazioni ſarà il prodotto del numero r di termini della ſerie $m . m-1 . m-2$ ec.

15. Imperocchè $\frac{1 . 2 . 3 \ldots m-r . m-(r-1) \ldots m-2 . m-1 . m}{1 . 2 . 3 \ldots m-r}$ $= m . m-1 . m-2 \ldots m-(r-1)$, dove vi è dopo il primo termine un numero di termini $r-1$, e però includendo lo ſteſſo primo, ſe ne ha il numero r.

16. Corol. 3. Se vi ſaranno inoltre altre ſomme di termini, che non ſi debbano mutar fra loro, e in una il loro numero ſia t, in un' altra u ec.; il numero delle combinazioni ſi dovrà per la ſteſſa ragione ſcemare ancora, dividendolo pel prodotto de' termini $1 . 2 . 3 \ldots t . 1 . 2 . 3 \ldots u$ ec.

17. Quindi in quel caſo il numero delle combinazioni ſarà $\frac{m . m-1 . m-2 \ldots m-(r-1)}{1 . 2 . 3 \ldots t . 1 . 2 . 3 \ldots u \text{ ec.}}$

18. Poſte queſte regole delle combinazioni, ſi vedrà ſubito la dimoſtrazione della prima, e ſeconda regola propoſta pel coefficiente numerico.

19. Se nel fare la multiplicazione ſucceſſiva, richieſta per l'elevazione del dato infinitinomio, ſi mette ſempre la nuova lettera multiplicante avanti a tutte quelle, che già ſi trovano ne' termini della potenza precedente, i quali devono multiplicarſi; è coſa manifeſta, che tutti i valori diſſimili verranno meſcolati fra loro in tutte le maniere poſſibili, e combinati comun-

munque colli ſimili ; ma li ſimili ſaranno aggiunti a ſe ſteſſi, e a quelli in tal maniera , che non abbiano fra loro , ſe non un ordine unico. Verrà tanto il bc, quando il c ſi multiplica per b, quanto il cb, quando il b ſi multiplica per c; così pure verranno tutti i terni bcd, bdc, cbd, cdb, dbc, dcb, quando per qualunque delle 3. lettere ſi multiplica l'uno , e l'altro de' ſeguenti due ambi delle altre due. Ma il b^2 verrà ſolo una volta, quando il b ſi multiplica per b, e il b^3, quando per b ſi multiplica il b^2.

20. Quindi ſe ſia r il numero delle parti uguali , che devono dare il termine, onde vi debba eſſere a^{m-r}, cioè un numero $m-r$ di termini ſimili a, e tutti gli altri ſieno diſſimili; ſarà pel Corol. 2. il numero di combinazioni uguale al prodotto di un numero r di termini della progreſſione $m \,.\, m-1 \,.\, m-2$ ec., conforme alla prima regola , che dà il numeratore del coefficiente numerico. Ma ſe vi ſaranno inoltre altri termini b, c, d ec. ſimili corriſpondenti a delle parti uguali componenti il numero n, converrà inoltre dare per diviſore numerico altrettante ſerie $1 \,.\, 2 \,.\, 3$ ec., quante ſono le ſpecie di eſſe parti uguali , continuando ciaſcuna ſerie per tanti termini , quante ſono eſſe in ogni ſpecie. Queſte ſerie coll'unità meſſa per l'analogía in luogo di ogni parte ſolitaria, danno appunto il denominatore preſcritto nella regola ſeconda.

21. Corol. 1. E' coſa facile a vedere, che ove la potenza m ſia un numero determinato poſitivo intero, ſi ſcemerà la fatica di molto; giacchè dovranno rigettarſi tutti i modi di comporre il numero n, che abbiano numero di parti maggior di m; mentre in eſſi modi ſi avrebbe nel numeratore $m-m=0$: poſto poi negli altri per m il ſuo numero, ſi eliderebbero varj numeratori da' denominatori , e il calcolo diverrebbe aſſai più ſemplice.

22. Se nell' eſempio propoſto ſi cercaſſe la potenza terza; fatto $m=3$, e rigettati tutti i modi, che ânno più di 3. parti, ſi rigetterebbero i modi 1 , 2 , 3 , 5 , e gli altri darebbero $\frac{3.2.1}{1.2.3}=1$, $\frac{3.2.1}{1.1.1}=6$, $\frac{3.2}{1.2}=3$, $\frac{3.2.1}{1.1.2}=3$, $\frac{3.2}{1.1}=6$, $\frac{3.2}{1.1}=6$, $\frac{3}{1}=3$. Quindi il membro ſettimo della terza potenza, ommeſſo anche l'a, ove ſono 3 le parti per l'$a^{3-3}=a^0=1$, ſarebbe $(c^3+6bcd+3ad^2+3b^2e+6ace+6abf+3a^2g)x^6$.

23. Corol. 2. Se l'infinitinomio non ha il primo termine mancante di x, il valore a ſarà $=0$. Quindi ſaranno $=0$ tutti i termini, ne' quali eſſo vi entra, cioè tutti i termini, che ânno numero di parti corriſpondenti minor di r: onde mancheranno tutti i membri appartenenti alle potenze di x minori di m. Sarà meglio in queſto caſo conſiderare l'infinitinomio ridotto a queſta forma $ax+bx^2+cx^3$ ec. $=x(a+bx+cx^2$ ec.); onde elevato $a+bx+cx^2$ ec., e moltiplicato ogni termine per x^m, ſi avrà l'intento.

24. Corol. 3. Se nell' infinitinomio manca qualche potenza di x, nella formola generale $a+bx+cx^2$ ec. ſarà $=0$ la lettera, che corriſponde a quella potenza : e però anderanno rigettati tutti que' modi di comporre il numero n, che avranno qualche parte eſprimente quella potenza.

25. Corol. 4. Quindi ſe in cambio dell'infinitinomio ſi avrà un polinomio; baſterà ritenere que' modi ſoli, ne' quali non vi è parte alcuna, che non corriſponda a qualche eſponente di que' del polinomio medeſimo.

26. Corol. 5. Se un polinomio finito ſi dovrà elevare a una potenza eſpreſſa da un numero intero poſitivo; la formola darà un numero finito di termini , e ſe la potenza la più alta di x ſarà r; il membro ultimo avrà x^{mr} divenendo $=0$ qualunque mem-

membro posteriore. Imperocchè in esso dovrebbe essere $n > mr$; onde se n si divida anche in parti uguali m; ogni parte sarà $\frac{n}{m} > r$: e però molto più, se si divida in un numero minore di parti o uguali, o disuguali, qualche parte sarà maggiore di r: quindi essa non si troverà tra gli esponenti del dato polinomio; onde quel modo di comporre il numero n dovrà rigettarsi pel Corol. 4.

27. Scolio. Converrebbe ora determinare il numero de' diversi modi, ne' quali si può comporre un dato numero da' numeri interi. Questo argomento lo tratta a lungo l'Eulero nella Introduzione *in Analysim Infinitorum* al tomo 1. capo 16., ove riduce il problema alla evoluzione della frazione $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3) \text{ ec.}}$ in una serie ricorrente della forma $1 + Ax + Bx^2 \ldots + Px^n$. Fa vedere, che ogni coefficiente P mostra in quanti modi il suo compagno n possa formarsi colla addizione de' numeri interi, e ne forma la seguente tavola

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135

15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
176	231	297	385	490	627	792	1002	1250	1570

28. Ogni numero, che sta sotto, mostra in quanti modi si possa comporre il numero, che sta sopra. Vi si vede, che pel num. 6. vi sono modi 11., quanti appunto se ne sono trovati nell' esempio proposto. Vi si scorge poi facilmente, quanto vada innanzi questo numero ne' numeri maggiori, e però quanto orribile sia la farragine de' termini, che devono nascere ne' membri un poco avvanzati. Il membro ventesimo quinto, che corrisponde all' x^{24} ha già più di un migliaro, e mezzo di termini. Almeno col metodo qui proposto questi, ancora si troverebbero da se senza la tanto più immensa farragine della somma di tutti i precedenti, e ciascuno di essi si avrebbe con un metodo tanto semplice, e generale.

29. Scolio 2. Questo metodo io l'ho già pubblicato nel giornale de' Letterati di Roma fino dall' anno 1747., ove in una di due susseguenti Memorie delle Riflessioni, che vi ho aggiunte, ne ho anche fatto il confronto con quello del Moivre. Ma qui l'ho dimostrato con metodo assai più semplice, e diretto, che ho ricavato dalla natura stessa dell' oggetto, prendendolo dalle formole delle combinazioni, che vi devono entrare. Succede quasi sempre anche in Geometría, e nel calcolo, che le vie più diritte, e più semplici per arrivare ad un termine nascosto sono le ultime a discuoprirsi.

IL FINE.

		ERRORI	CORREZIONI
pag. 3.	lin. 3.	le quantità	quantità
	22.	$a \; 1 \, abx$	a $1 \, abx$
	26. 27.	dalle dimenſioni	delle dimenſioni
6.	20.	per l'apporſi	per l'opporſi
15.	ult.	o che	
21.	11.	$\begin{matrix} a & c \\ b & d \end{matrix}$	$\frac{a}{b} \quad \frac{c}{d}$
66.	ult.	ptoblema	problema
71.	26.	10.º	8.º
103.	4.	t	

Si incontrerà di tanto in tanto qualch'altro errore ſimile a queſti, ma perciò aſſai facile ad avvertirſi dal lettore. Dopo le prime pagine, la reviſione è ſtata ben ſollecita, ed eſatta; certi errori però, che dipendono dalla più forte, o più debole preſſione del torchio, ſono ſtati inevitabili, ma non già ſparſi in tutte le copie. A cagione d'eſempio in varie copie ſi vedrà alla pag. 21. ſegnata leggermente la lineetta, che ſepara l'a dal b, in altre ſi troverà chiaramente impreſſa, ed in altre ſarà affatto ſvanita.

Nell' Aggiunta pag. 244.	lin. 12.	00153	0, 0153
	24.	— 20	— t
	25.	$r' - t$	$r' - 9$
247.	4.	linea	virgola
252.	12.	all'	coll'
254.	23.	o così	così